О некоторых алгебраических конструкциях на произведении сфер

Игорь Баяк

Аннотация

В данной работе мы исследуем топологическую связь между абелевыми и неабелевыми группами четности. Абелевы группы четности формируются как ядра гомоморфизмов четности в группе $\mathbb{Z}^n$ а неабелевы группы четности формируются как ядра гомоморфизмов четности в группе $S_2 \wr S_n$. Факторизацией целочисленной решетки с помощью абелевых групп четности мы получаем фактор-решетки, которые формируют каркас (1-мерный клеточный комплекс) произведения сфер. Показано, что изоморфизмы этих фактор-решеток, образуют соответствующие неабелевы группы четности.

1 Группа $S_2 \wr S_n$ и гомоморфизмы четности

Хорошо известно, что группа подстановок S_n допускает расширение до группы $P_n = S_2 \wr S_n$, которую легко представить группой таких линейных преобразований $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_n) \to (x'_1, \ldots, x'_n) : x'_i = \pm x_j$, в которых отображение множества индексов координат биективно, или группой квадратных матриц порядка n, имеющих в каждом столбце и в каждой строке по одному ненулевому элементу равному 1 или -1.

Однако малоизвестно, что на группе P_n можно задать три типа функций четности. Действительно, по определению $S_2 \wr S_n = \prod^n S_2 \rtimes S_n$, где группа S_n действует на группе $\prod^n S_2$ подстановками компонент прямого произведения. Поэтому всякий элемент $z \in S_2 \wr S_n$ раскладывается в произведение $z = xy$, где $x \in S_n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod^n S_2$, а сопряженный ему элемент $z^* \in S_2 \wr S_n$ раскладывается в произведение $z^* = yx$. Тогда можно дать следующие определения четности элемента z и сопряженного ему элемента z^*.

1.1 Определение. Функцией четности первого типа называется функция $\operatorname{sgn} z = \operatorname{sgn} z^* = \operatorname{sgn} x$

1.2 Определение. Функцией четности второго типа называется функция $\operatorname{sgn} z = \operatorname{sgn} z^* = \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} y_1 * \cdots * \operatorname{sgn} y_n$

1.3 Определение. Функцией четности третьего типа называется функция $\operatorname{sgn} z = \operatorname{sgn} z^* = \operatorname{sgn} x * \operatorname{sgn} y$

Все эти функции гомоморфно отображаются в группу $\{\pm 1\}$. Действительно, пусть дано разложение $x = x'x''$ и $y = y'y''$. Тогда, если $\operatorname{sgn} xy = \operatorname{sgn} x$, то $\operatorname{sgn} x'y' * \operatorname{sgn} x''y'' = \operatorname{sgn} x' * \operatorname{sgn} x'' = \operatorname{sgn} x'x'' = \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} xy$, если $\operatorname{sgn} xy = \operatorname{sgn} y$, то $\operatorname{sgn} x'y' * \operatorname{sgn} x''y'' = \operatorname{sgn} y' * \operatorname{sgn} y'' = \operatorname{sgn} y'y'' = \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} xy$, если $\operatorname{sgn} xy = \operatorname{sgn} x * \operatorname{sgn} y$, то $\operatorname{sgn} x'y' * \operatorname{sgn} x''y'' = \operatorname{sgn} x' * \operatorname{sgn} y' * \operatorname{sgn} x'' * \operatorname{sgn} y'' = \operatorname{sgn} x' * \operatorname{sgn} x'' * \operatorname{sgn} y' * \operatorname{sgn} y'' = \operatorname{sgn} x * \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} xy$, чем и доказывается, что все наши функции четности являются гомоморфизмами. Таким образом, гомоморфизмы четности выделяют в группе P_n три подгруппы: AP_n, BP_n, CP_n, которые формируются как ядра функций четности соответственно первого, второго и третьего типа.

Исследуем теперь алгебраическую структуру этих групп. Прежде всего напомним, что группа P_n изоморфна группе $\mathbb{Z}_2^n \leftthreetimes S_n$, где $\mathbb{Z}_2^n$ это прямое произведение n компонент двухэлементного поля $\mathbb{Z}_2$, и заметим, что гомоморфизм четности группы $\mathbb{Z}_2^n$, равный сумме по модулю 2 всех n компонент ее элемента, выделяет в ней подгруппу $A\mathbb{Z}_2^n$, состоящую из элементов, в которых 1 встречается четное число раз или вовсе не встречается. Поскольку всякий элемент группы $A\mathbb{Z}_2^n$ раскладывается в сумму, каждое слагаемое которой состоит из пар единиц и остальных нулей, то группа $A\mathbb{Z}_2^n$ порождается своими подгруппами, изоморфными $A\mathbb{Z}_2^2$. Тогда из определения групп AP_n, BP_n следует, что группа AP_n изоморфна группе $\mathbb{Z}_2^n \leftthreetimes A_n$, где A_n это знакопеременная группа, а группа BP_n изоморфна группе $A\mathbb{Z}_2^n \leftthreetimes S_n$. Поскольку знакопеременная группа порождается циклами длины 3, то группа AP_n порождается своими подгруппами третьей степени AP_3. В свою очередь, поскольку S_n порождается транспозициями а группа $A\mathbb{Z}_2^n$ порождается своими двухкомпонентными подгруппами, то группа BP_n порождается своими подгруппами второй степени BP_2. Выпишем здесь линейное представление и матричный образ группы BP_2: $\{(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2), (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1), (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2), (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Элементам этой группы соответствуют отражения плоскости (x_1, x_2) относительно диагоналей $x_2 = x_1$ и $x_2 = -x_1$. Выпишем также линейное представление и матричный образ группы CP_2: $\{(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2), (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1), (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2), (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Элементам этой группы соответствуют повороты евклидовой плоскости на угол кратный $\pi/2$. Группа CP_n также порождается своими подгруппами, изоморфными CP_2. Действительно, возьмем произвольный элемент группы CP_n и, умножая его на элементы группы, преобразующие только пару координат пространства представления, получим сначала тождественное отображение в компоненте S_n а затем и в компоненте S_2 сплетенного произведения, что возможно в силу свойства групп S_n и $A\mathbb{Z}_2^n$. Тогда, произведение обратных элементов разложения будет равно исходному элементу CP_n, а следовательно всякий элемент группы CP_n можно разложить в произведение элементов групп, изоморфных CP_2.

Пусть теперь дано такое разбиение множества $I = \{1, \ldots, n\}$ на непересекающиеся подмножества $I_1, \ldots, I_m$, что мощности подмножеств I_i равны n_i, причем $n_1 + \cdots + n_m = n$. Тогда всякому разбиению $J = \{I_1, \ldots, I_m\}$ можно сопоставить группу, образованную внешним полупрямым произведением

$$JP_n = CP_{n_1} \times \cdots \times CP_{n_m} \leftthreetimes BP_m, \tag{1.1}$$

где группа BP_m действует на группе $\prod^m CP_{n_i}$ соответствующими подстановками компонент прямого произведения. Назовем эту группу *конечной неабелевой группой четности.* Следует отметить, что в общем случае группа JP_n не имеет матричного представления, но ее элементы могут быть представлены матрицами (представляющими группу BP_m), ненулевые элементы которых являются группами CP_{n_i}, также имеющими матричное представление.

Пусть теперь задан матричный образ вещественного линейного представления групп второй степени CP_2, BP_2. Обозначим посредством C и B матричные алгебры, порождаемые матрицами, соответствующих групп, а посредством C^*, B^* обозначим группы обратимых элементов соответствующих алгебр. Тогда несложно показать, что ядро гомоморфизма четности $C^* \to \mathbb{R}^* : C^* \to \det C^*$ равно специальной ортогональной группе $SO(2)$, а ядро гомоморфизма четности $B^* \to \mathbb{R}^* : B^* \to \det B^*$ равно специальной псевдоортогональной группе $SO(1,1)$. Действительно, поскольку $C = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right\}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то множество решений уравнения $\det C^* = x^2 + y^2 = 1$ как раз и выделяет в группе C^* подгруппу $SO(2)$. В свою очередь, поскольку $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \right\}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то множество решений уравнения $\det B^* = x^2 - y^2 = 1$ выделяет в группе B^* подгруппу $SO(1,1)$. С помощью блочно-диагональных матриц порядка n мы зададим изоморфную $SO(2)$ группу $SO_{jk}(2) = \operatorname{diag}\left[1, \ldots, SO(2)_{(jk)}, \ldots, 1\right]_n$, которая образована матрицами, отличающимися от единичной только тем, что на пересечении пары строк и пары столбцов с индексами j, k находится матричный элемент группы $SO(2)$. Аналогично зададим изоморфную $SO(1,1)$ группу $SO_{jk}(1,1) = \mathrm{diag}\left[1,\ldots,SO(1,1)_{(jk)},\ldots,1\right]_n$. Тогда всякому разбиению J можно сопоставить группу

$$SO(n_1,\ldots,n_m) = \langle SO_{jk}(2), SO_{jk}(1,1)\rangle_J\,, \tag{1.2}$$

порождаемую генераторами $SO_{jk}(2)$ и $SO_{jk}(1,1)$ так, что пара индексов первого генератора принадлежит произвольному подмножеству I_i, а пара индексов второго генератора принадлежит произвольной паре подмножеств разбиения. Однако заметим, что достаточное для образования группы $SO(n_1,\ldots,n_m)$ число генераторов задается формулой

$$p = \sum_m n_i(n_i-1)/2 + m(m-1)/2, \tag{1.3}$$

поскольку для гиперболического поворота между двумя подпространствами достаточно только одного генератора $SO_{jk}(1,1)$ с произвольными индексами j,k, взятыми из двух разных подмножеств I_i, а остальные генераторы $SO_{jk}(1,1)$ (с другими индексами) будут производными от выбранного генератора и дискретных вращений внутри каждого из двух подпространств в отдельности. Тем самым, поскольку группа Ли порождается своими однопараметрическими подгруппами, то мы получили p-параметрическую группу Ли $SO(n_1,\ldots,n_m)$, которую назовем *группой четности Ли*.

Итак, взяв за основу группу $S_2 \wr S_n$ и задав на ней гомоморфизмы четности, нам удалось получить не только конечные но и непрерывные группы четности, включающие в себя в том числе и некоторые классические группы. Заметим однако, что для образования всех возможных матричных групп Ли посредством порождения их маломерными подгруппами Ли необходимо воспользоваться еще одной матричной алгеброй, а именно, алгеброй $A = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y\end{pmatrix}\right\}$, где $x,y\in\mathbb{R}$. Тогда, всякая подгруппа общей линейной группы $GL(n,\mathbb{R})$ порождается всевозможными маломерными группами Ли, которые могут быть образованы из матричных алгебр $M(2,\mathbb{R})$, A,B,C и расширены группой мономиальных подстановок двухэлементного базиса. Например, многосвязная, а точнее $2^n n!$-компонентная, группа Ли, состоящая из n-матриц, в каждой строке и каждом столбце которых по одному ненулевому элементу, порождается генераторами, изоморфными односвязной группе Ли $A^+ = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y\end{pmatrix}\right\}$, где $x,y\in\mathbb{R}^+$, и генераторами, изоморфными конечной группе $S_2 \wr S_2$.

2 Группа $\mathbb{Z}^n$ и гомоморфизмы четности

Зададим на группе $\mathbb{Z}^n$ функцию четности $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}_2 : |x_1+\ldots+x_n| \mod 2$, значение которой равно сумме по модулю 2 всех n компонентов ее элемента. Тем самым, мы получим гомоморфизм группы $\mathbb{Z}^n$ в группу $\mathbb{Z}_2$. Ядро гомоморфизма четности мы обозначим $A\mathbb{Z}^n$ и назовем группой четных элементов $\mathbb{Z}^n$. Легко заметить, что группа $A\mathbb{Z}^n$ состоит из элементов $\mathbb{Z}^n$, в которых нечетные компоненты встречаются четное число раз либо вовсе не встречаются, и поэтому она порождается всевозможными своими подгруппами второй степени $A\mathbb{Z}^2$. Имея ввиду, что $A\mathbb{Z}^1 = 2\mathbb{Z}$, сформируем также в $\mathbb{Z}^n$ подгруппу $B\mathbb{Z}^n = (2\mathbb{Z})^n$, состоящую из прямого произведения (суммы) n экземпляров $A\mathbb{Z}^1$, т. е. из четных целых во всех компонентах $\mathbb{Z}^n$. Заметим при этом, что $\mathbb{Z}^n/B\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}_2^n$.

Пусть далее мы имеем разбиение $J = \{I_1, \ldots, I_m\}$, определенное ранее. Тогда, в соответствии с этим разбиением можно сформировать группу

$$J\mathbb{Z}^n = A\mathbb{Z}^{n_1} \times \cdots \times A\mathbb{Z}^{n_m}. \tag{2.1}$$

Фактор-группу $\mathbb{Z}^n/J\mathbb{Z}^n$, изоморфную группе $\mathbb{Z}_2^m$ порядка 2^m мы назовем *конечной абелевой группой четности*. Порядок группы $\mathbb{Z}^n/J\mathbb{Z}^n$ можно вычислить также, исходя из того, что

$$\mathbb{Z}^n/J\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^{n_1}/A\mathbb{Z}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}^{n_m}/A\mathbb{Z}^{n_m} \tag{2.2}$$

а всякая группа $\mathbb{Z}^{n_1}/A\mathbb{Z}^{n_i}$ состоит из двух элементов. В качестве иллюстрации приведем здесь несколько примеров. Если $J = \{(1), (2)\}$, то $J\mathbb{Z}^2 = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}\}$, а группа $\mathbb{Z}^n/J\mathbb{Z}^2$ состоит из четырех точек. Если $J = \{(1,2)\}$, то $J\mathbb{Z}^2 = \{(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}), (2\mathbb{Z}+1, 2\mathbb{Z}+1)\}$, а группа $\mathbb{Z}^n/J\mathbb{Z}^2$ состоит из двух точек, причем на плоскости ее можно представить в качестве двух классов целочисленных параллелограммов, т.е. параллелограммов, составленных из пар целых чисел на его сторонах, с равноудаленными от нулевой точки вершинами, лежащими в четных и нечетных точках координатных осей соответственно.

Перейдем теперь к рассмотрению непрерывных абелевых групп. Пусть даны гомоморфизмы $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_1 : (x \mapsto |x| \mod 1)$ и $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_2 : (x \mapsto |x| \mod 2)$, где $|x| \mod 1$ и $|x| \mod 2$ означают классы сравнений числа x по модулю 1 и 2 соответственно. Заметим при этом, что если фактормножество $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ изоморфно окружности S^1, то фактормножество $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ изоморфно проективной прямой $\mathbb{R}P^1$, которая получается отождествлением противоположных точек окружности S^1, причем, топологически S^1 и $\mathbb{R}P^1$ эквивалентны. Кроме того, легко задать гомоморфизм $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 : (x_1, x_2) \mapsto (|x_1| \mod 2, |x_2| \mod 2)$, ядро которого формирует группу $2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$ а образ изоморфен тору $S^1\times S^1$. Вместе с тем, можно задать гомоморфизм $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_1\times\mathbb{R}_2:(x_1,x_2)\mapsto(|x_2| \mod 1, |x_1+x_2| \mod 2)$, ядро которого формирует группу $A\mathbb{Z}^2$ а образ изоморфен пространству сферических координат $\mathbb{R}^2(S^2)$. Действительно, достаточно установить соответствие между сферическими координатами (ϕ,θ) (где принято, что широта ϕ измеряется по модулю 2π, а долгота θ — по модулю π) и компонентами произведения $\mathbb{R}_1\times\mathbb{R}_2$ согласно формул $\phi=\pi|x_1+x_2| \mod 2$, $\theta=\pi|x_2| \mod 1$, откуда сразу получим $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2\simeq\mathbb{R}^2(S^2)$.

Аналогично, можно задать гомоморфизм $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_1^{n-1}\times\mathbb{R}_2:(x_1,\dots,x_n)\mapsto(|x_2| \mod 1,\dots,|x_n| \mod 1, |x_1+\dots+x_n| \mod 2)$, который имеет ядро, образующее группу $A\mathbb{Z}^n$, а его образ изоморфен пространству сферических координат n-мерной сферы $\mathbb{R}^n(S^n)$, т.е. $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^n/A\mathbb{Z}^n\simeq\mathbb{R}^n(S^n)$. Обобщение этой конструкции сводится к тому, что для произвольного разбиения J строится гомоморфизм, имеющий в качестве образа *непрерывную абелеву группу четности* $\mathbb{R}^n/J\mathbb{Z}^n$. А поскольку

$$\mathbb{R}^n/J\mathbb{Z}^n=\mathbb{R}^{n_1}/A\mathbb{Z}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_m}/A\mathbb{Z}^{n_m}, \tag{2.3}$$

то непрерывная абелева группа четности изоморфна координатному пространству прямого произведения сфер $S^{n_1}\times\cdots\times S^{n_m}$.

3 Соотношение между группами четности

Прежде всего найдем дискретные автоморфизмы поля действительных чисел $\mathbb{R}$, которые допускаются его факторизацией $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Если мы возьмем полярное представление комплексного числа $\rho e^{i\varphi}$, где $\rho\in\mathbb{R}^+$, $\varphi\in[0,2\pi[$, то его аргументу и модулю можно поставить в соответствие некоторые линейные преобразования окружности $S^1=\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$. Так, модуль комплексного числа можно связать с коэффициентом деформации окружности, т.е. модуль ρ задает преобразование $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}\mapsto\rho\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$, а его аргумент можно связать с поворотами окружности, т.е. аргумент φ задает преобразование $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{R}/2\mathbb{Z}+\varphi/\pi$. В свою очередь, если мы возьмем полуполярное представление комплексного числа $\kappa e^{i\theta}$, где $\kappa\in\mathbb{R}$, $\theta\in[0,\pi[$, то его модуль κ и аргумент θ задают соответствующие линейные преобразования проективной прямой $\mathbb{R}P^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, а именно: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\mapsto\kappa\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{R}/\mathbb{Z}+\theta/\pi$. Таким образом, мы нашли искомые дискретные автоморфизмы $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}\mapsto 1*\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\mapsto\pm 1*\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, которые соответствуют дискретным вращениям окружности и проективной прямой соответственно.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана целочисленная решетка $\mathbb{L}^n = \{\mathbb{Z}^n; (\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{R}, \dots, \mathbb{Z})\}$, состоящая из прямых линий, пересекающихся в точках $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами и параллельных базисным ортам. Целочисленная решетка $\mathbb{L}^n$ представляет собой регулярно повторяющийся набор узлов и ребер, который может быть получен бесконечным повторением n-мерного образующего параллелепипеда, состоящего из 2^n узлов соединенных ребрами. Следовательно, группа изоморфизмов целочисленной решетки совпадает с группой изоморфизмов образующего параллелепипеда, и поэтому равна группе мономиальных подстановок, которая изоморфна сплетенному произведению $S_2 \wr S_n$.

Факторизуем теперь решетку $\mathbb{L}^n$ так, чтобы узлы решетки факторизовались с помощью канонического гомоморфизма $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n$, т.е. в точку, а каждый класс параллельных прямых целочисленной решетки факторизовался бы с помощью канонического гомоморфизма $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в проективную прямую $\mathbb{R}P^1$. Потребуем при этом, чтобы касательные вектора к проективным прямым факторизованной решетки в ее факторизованном узле образовали систему из n линейно независимых векторов. В результате такой факторизации целочисленной решетки, мы получим фактор-решетку $\mathbb{L}^n/\mathbb{Z}^n$, у которой группа изоморфизмов, сохраняющих неподвижной нулевую точку, равна $S_2 \wr S_n$. Это следует из того, что группа дискретных вращений проективной прямой равна S_2 и нет никаких топологических препятствий для образующих группу подстановок S_n перестановок 1-мерных элементов решетки $\mathbb{L}^n/\mathbb{Z}^n$.

Установим теперь группу дискретных вращений фактор-решетки $\mathbb{L}^n/A\mathbb{Z}^n$, т.е. группу изоморфизмов фактор-решетки, сохраняющих неподвижной ее нулевую точку. Прежде всего заметим, что фактор-решетка $\mathbb{L}^1/2\mathbb{Z}$ получается факторизацией регулярной решетки $\mathbb{L}^1$ в результате канонического гомоморфизма $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ в окружность S^1, имеющую две противоположные узловые точки. А поскольку дискретные вращения окружности сводятся к ее тождественному отображению, то группа дискретных вращений фактор-решетки $\mathbb{L}^1/2\mathbb{Z}$ тривиальна и равна CP_1. Если мы теперь образуем фактор-решетку $\mathbb{L}^2/A\mathbb{Z}^2$, изоморфную пучку из двух окружностей, пересекающихся в двух своих противоположных точках, то легко установим, что группа дискретных вращений этого пучка равна группе CP_2. Наконец, пусть дана фактор-решетка $\mathbb{L}^n/A\mathbb{Z}^n$, изоморфная пучку из n окружностей, пересекающихся в двух своих противоположных точках, причем касательные вектора к окружностям в этих точках образуют систему из n линейно независимых векторов. Поскольку всякая пара ее 1-мерных элементов равна $\mathbb{L}^2/A\mathbb{Z}^2$, то всякое дискретное вращение фактор-решетки $\mathbb{L}^n/A\mathbb{Z}^n$ можно разложить в композицию дискретных вращений всевозможных ее пар, а следовательно группа дискретных вращений фактор-решетки $\mathbb{L}^n/A\mathbb{Z}^n$ равна группе четности CP_n.

Пусть дана фактор-решетка $\mathbb{L}^2/B\mathbb{Z}^2$, которую можно представить в виде четырех окружностей, точки пересечения которых расположены в узлах образующего параллелограма решетки $\mathbb{L}^2$. Поскольку всякая окружность этой решетки не допускает обращения связанных ей узлов, то дискретные вращения фактор-решетки $\mathbb{L}^2/B\mathbb{Z}^2$ сводятся к тем изоморфизмам образующего параллелограма, которые порождаются исключительно его диагональными отражениями, а следовательно они составляют группу BP_2. Аналогично, пусть дана фактор-решетка $\mathbb{L}^n/B\mathbb{Z}^n$, которую можно представить в виде n-параллелепипеда, составленного из 2^n узлов, связанных окружностями. Тогда, дискретные вращения фактор-решетки $\mathbb{L}^2/B\mathbb{Z}^2$ сводятся к тем изоморфизмам образующего n-параллелепипеда, которые порождаются исключительно его диагональными отражениями, а следовательно они составляют группу BP_n.

Наконец, пусть дана фактор-решетка $\mathbb{L}^n/J\mathbb{Z}^n$, которую можно представить в виде m-параллелепипеда, составленного из 2^m узлов, связанных пучками из n_i окружностей. Поскольку дискретные вращения фактор-решетки $\mathbb{L}^n/J\mathbb{Z}^n$ сводятся к составляющим группу BP_m диагональным изомофизмам m-параллелепипеда, которые действуют на прямом произведении дискретных вращений пучков окружностей, составляющих группу $\prod^m CP_{n_i}$, то ее группа дискретных вращений равна $\prod^m CP_{n_i} \rightthreetimes BP_m$. Таким образом, доказано

3.1 Предложение. *Группа дискретных вращений решетки $\mathbb{L}^n/J\mathbb{Z}^n$ эквивалентна группе четности JP_n*

Если рассмотреть целый континуум непрерывных вращений фактор-решетки $\mathbb{L}^n/A\mathbb{Z}^n$, оставляющих на месте ее узловые точки, то мы получим группу движений сферы S^n, оставляющих неподвижными ее полюса, т.е., группу $SO(n)$. Аналогично можно было бы получить группу движений прямого произведения сфер, оставляющих неподвижными узловые точки соответствующей фактор-решетки. Действительно, если фактор-решетку $\mathbb{L}^n/J\mathbb{Z}^n$ рассматривать как каркас (одномерный клеточный комплекс) прямого произведения сфер $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_m}$, то группу дискретных вращений фактор-решетки JP_n можно было бы расширить до группы четности Ли $SO(n_1, \ldots, n_m)$ и сопоставить ее группе движений прямого произведения сфер $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_m}$, оставляющих неподвижными узловые точки соответстующей фактор-решетки.

В заключение найдем геометрическое представление унитарной группы. Пусть дана унитарная матрица комплексных чисел $(\kappa_{jk}e^{i\theta_{jk}})_n$, элементы которой $\kappa_{jk}e^{i\theta_{jk}}$ имеют полуполярное представление. Тогда, зануляя матрицу $(\theta_{jk})_n$, мы получим из нашей унитарной матрицы вещественную ортогональную матрицу $(\kappa_{jk})_n$, а приравнивая матрицу $(\kappa_{jk})_n$ единичной матрице, мы получим диагональную матрицу $\mathrm{diag}[e^{i\theta_{jj}}]_n$. С другой стороны, если взять произведение трех матриц ABC, где A и C произвольные вещественные ортогональные матрицы, а B – произвольная диагональная матрица $\mathrm{diag}[e^{i\theta_{jj}}]_n$, то мы получим множество унитарных матриц ABC, которое параметризуется n^2 независимыми величинами, т.е. составляет унитарную группу $U(n)$. Заметим также, что множество диагональных матриц $\mathrm{diag}[e^{i\theta_{jj}}]_n$ изоморфно группе тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Тем самым, имеет место

3.2 Предложение. *Унитарная группа $U(n)$ имеет геометрическое представление $O(n) \cdot T^n \cdot O(n)$, где точка обозначает связанное произведение.*

Мы говорим о геометрическом представлении унитарной группы, поскольку надеемся, что унитарная группа соответствует симметриям вырожденного тора, т.е. тора T^n, натягиваемого на сферу S^n, проколотую в своих полюсах прямой, которая служит осью вращения вырожденного тора.

Список литературы

[1] С. Ленг, Алгебра, "Мир", Москва, 1968

[2] Э. Б. Винберг, Курс алгебры, "Факториал", Москва, 1999

[3] А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1967.

[4] Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторной топологии, "Наука", Москва, 1986.