Эссе о природе гравитации

Баяк И. В.

Аннотация

В данной работе представлена векторная модель гравитации. Геометрия модели получена в результате накрытия цилиндра $\mathbb{R}^3 \times S^1$ пространством Минковского. Постоянное единичное векторное поле пространства Минковского, линии тока которого отображаются в винтовые линии цилиндра, мы сопоставляем с нулевым (вакуумным) состоянием, а гиперболический угол отклонения произвольного минимального векторного поля (т.е. векторного поля, ортогональные поверхности к которому имеют нулевую среднюю кривизну) от направления, выделенного вакуумным состоянием, мы сравниваем с гравитационным потенциалом. Топологические особенности векторного поля цилиндра, в которых его линии тока вырождаются в задающие окружности цилиндра, служат источниками возмущения вакуума (гиперболической кривизны векторного поля), и поэтому являются главным предметом нашего обсуждения. В работе показано, что данные топологические особенности имеют сходство как с материальными точками так и с квантовыми частицами.

1 Введение

Мы рассмотрим геометрические и динамические аспекты одной математической конструкции, призванной дать интерпретацию гравитации, а затем сравним ее с общепринятыми физическими теориями тяготения Ньютона и Эйнштейна. Поскольку это математическое построение основано на концепции движущейся материи, то воображаемые сущности нашей теории вполне материальны. В качестве общих посылок, предшествующих данной работе, назовем гидродинамический подход к гравитации Дж. Биркгофа [5] и идею компактификации лишнего измерения О. Клейна [6].

Полное представление о воображаемом механизме тяготения дает обращение к динамике векторного поля скоростей частичек потока движущейся материи, заданного на цилиндрическом многообразии $\mathbb{R}^3 \times S^1$, однако для наглядности мы сначала рассмотрим течение жидкости по поверхности цилиндра $\mathbb{R}^1 \times S^1$. Поскольку в качестве линейной траектории частички жидкости следует принять произвольную винтовую линию цилиндра (которая в общем случае может вырождаться в задающую окружность или в образующую прямую цилиндра), то в качестве квадрата протяженности отрезка линейной траектории можно взять произведение длины проекции отрезка траектории на образующую прямую и длины намотки отрезка траектории на задающую окружность цилиндра. В результате такой интерпретации, протяженность направленного отрезка линейной траектории частички жидкости будет равна длине соответствующего вектора псевдоевклидовой плоскости, полученной накрытием цилиндра плоскостью таким образом, чтобы одно семейство изотропных прямых плоскости отображалось в образующие прямые, а другое – в задающие окружности цилиндра. Действительно, в соответствии с нашей интерпретацией, квадрат протяженности линейного отрезка траектории частички будет задаваться формулой

$$l^2 = \omega r T \cdot vT,$$

где r - радиус цилиндра, ω - угловая скорость, v - поступательная скорость, - T - интервал времени движения частички по поверхности цилиндра, и если $\omega r T = x+t$, а $vT = x-t$, где (x,t) - координаты частички жидкости на псевдоевклидовой плоскости, измеренные в конечный момент времени T, то $l^2 = x^2 - t^2$. Вместе с тем, если псевдоевклидову плоскость (x,t) равномерно наматывать на цилиндр так, чтобы изотропные прямые $t + x = \tau$ ложились на образующие прямые цилиндра, то τ может служить эволюционным параметром динамически изменяющегося векторного поля цилиндра. Иначе говоря, динамику векторного поля цилиндра следует описывать статическим векторным полем псевдоевклидовой плоскости.

Таким образом, динамический закон движения потока жидкости, текущей по поверхности цилиндра, можно сформулировать как условие, которому должна удовлетворять дифференциальная форма (векторное поле), заданная на псевдоевклидовой плоскости. А поскольку нас интересует гравитационный потенциал, который мы интерпретируем как гиперболический угол $\varphi(x,t)$ отклонения единичного векторного поля $g(x,t)$ от направленного по оси t единичного (вакуумного) вектора c, то пусть форма гиперболической кривизны $\kappa = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt$ поля $g(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2\varphi}{dx^2} - \frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Кроме того, пусть в качестве особенностей рассматриваются такие линии псевдоевклидовой плоскости, при приближении к которым по оси x гиперболический угол отклонения вектора $g(x,t)$ от оси t стремится к бесконечности, а при удалении – к нулю. Тем самым, в качестве особенности векторного поля цилиндра мы рассматриваем ту область цилиндра, в которой геометрия его винтовых линий тока вырождается в геометрию задающей окружности цилиндра. Простейшим статическим (независимым от эволюционного параметра) решением одномерного волнового уравнения, удовлетворяющим заданным граничным условиям, является потенциал

$$\varphi = \frac{m}{|x-t|},$$

который можно интерпретировать как потенциал, определяющий течение жидкости по поверхности цилиндра, разрезанного вдоль его задающей окружности в точке образующей прямой $x-t=0$, или как потенциал, задающий поток жидкости на цилиндре в том случае, когда на него надето запорное (ограничительное) кольцо. Далее нас интересует динамика топологических особенностей этого типа, т.е. взаимодействие колец-особенностей. Мы полагаем, что свободное движение кольца-особенности характеризуется постоянством его угловой и поступательной скорости движения, а протяженность его траектории l в зависимости от абсолютного времени свободного движения T задается формулой $l = \frac{T}{m}$, откуда следует, что выражение $\frac{1}{\omega r v}$, составленное из характеристик кольца-особенности, сопоставляется с квадратом массы материальной точки m^2, а абсолютное время свободного движения кольца-особенности T сопоставляется с действием свободного движения материальной точки $S = ml$. Кроме того, пусть ускорение произвольного кольца-особенности, измеренное на оси x, определяется внешним потенциалом (например, потенциалом остальных колец-особенностей) согласно формуле

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Тем самым, взаимодействие колец-особенностей характеризуется их взаимным притяжением, что позволяет нам сопоставить их с материальными точками, которые наблюдатель видит на оси x.

Однако, несмотря на привлекательность очевидных физических аналогий, вернемся все же к динамике потоков цилиндрического многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$. В статье показано, что его накрытием служит пространство Минковского, и поэтому динамические потоки цилиндрического многообразия могут быть представлены статической дифференциальной формой пространства Минковского. Решая вариационное уравнение для функционала объема (массы) жидкости, протекающей через произвольную область евклидова подпространства $\mathbb{R}^3$ цилиндра $\mathbb{R}^3 \times S^1$, мы показываем, что векторное поле скоростей частичек жидкости $g(x,t)$, заданное в пространстве Минковского, должно быть единичным, голономным и минимальным, т.е. ортогональные к нему поверхности должны иметь нулевую среднюю кривизну. Ньютонов гравитационный потенциал $\varphi(x,0)$, удовлетворяющий вне особенностей условию $\Delta\varphi(x,0) = 0$ и трактуемый нами как гиперболический угол отклонения поля $g(x,t)$ от вакуумного направления, включается в нашу модель в качестве граничного условия, доставляющего статическое решение волнового уравнения. Затем это статическое решение обогащается произволом свободного движения особенностей и законом вынужденного движения особенности

$$\ddot{x} = \nabla\varphi(x,0),$$

обуславливающим их взаимное притяжение.

Следует однако отметить, что квазиньютоново описание нашей модели гравитации не является единственно возможным, а есть всего лишь взгляд на нее со стороны абсолютного наблюдателя. Если же мы посмотрим на нее с точки зрения реального наблюдателя, то вынуждены будем прибегнуть к квазиэйнштейнову описанию. В статье показано, что для измерения локальных пространственных координат и времени реальный наблюдатель в отличии от абсолютного наблюдателя использует не выделенный с помощью вакуумного векторного поля c ортонормированный базис пространства Минковского, а ортогональный репер, выделенный с помощью векторного поля $g(x,t)$ и нормированный гиперболическим углом между $g(x,t)$ и c. Поскольку репер реального наблюдателя нормирован не на единичную длину пространства Минковского а на единичные координаты цилиндра, то масштаб пространственных и временных координат реального наблюдателя зависит от гиперболического угла между $g(x,t)$ и c, и поэтому реальный наблюдатель видит не плоское пространство Минковского а псевдориманово многообразие, индуцированное полем тяготения.

В данной статье мы используем сферические координаты евклидова пространства, отличающиеся от классических тем, что широта у них измеряется по модулю 2π а долготы — по модулю π. Иначе говоря, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ приняты сферические (полярные) координаты ρ, φ, $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}$, которые связаны с декартовыми координатами $x_1, \dots, x_n$ формулами:

$$x_1 = \rho\cos\varphi,$$

$$x_2 = \rho\sin\varphi\cos\vartheta_1,$$

$$x_3 = \rho \sin\varphi \sin\vartheta_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = \rho \sin\varphi \cdots \sin\vartheta_{n-3} \cos\vartheta_{n-2},$$

$$x_n = \rho \sin\varphi \cdots \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},$$

где $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \vartheta_i < \pi$.

Обращаем также ваше внимание на то, что в данной статье под проективным пространством RP^n понимается пространство центрально-симметричных прямых линий пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. факторпространство пространства $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ по отношению эквивалентности $x \sim rx$, где $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2 Геометрия модели

Геометрия модели основана на таких простых математических понятиях как отображение намотки сферы S^2 евклидовой плоскостью и отображение намотки цилиндра $\mathbb{R} \times S^1$ и тора $S^1 \times S^1$ псевдоевклидовой плоскостью.

Пусть на евклидовой плоскости заданы полярные координаты (φ, ρ), а сфера имеет угловые координаты (θ, ϕ) долготы и широты соответственно. Тогда, если задать соответствие, использующее классы сравнений по модулю π и 2π,

$$\theta = |\varphi| \mod \pi, \quad \phi = |\pm\pi\rho| \mod 2\pi, \tag{2.1}$$

где знак $+$ берется для $0 \le \varphi < \pi$ а знак $-$ для $\pi \le \varphi < 2\pi$, то мы получим простое отображение евклидовой плоскости на сферу. В самом деле, если исходить из определения проективной прямой как совокупности центрально-симметричных прямых плоскости, то будет понятно, что евклидова плоскость порождается произведением $RP^1 \times \mathbb{R}$, в котором в качестве компоненты $\mathbb{R}$ следует взять евклидову прямую, т.е. прямую, не допускающую ни деформаций ни отражений. В свою очередь, поскольку в касательной плоскости сферы мы также можем задать пространство неориентированных направлений, то сфера порождается произведением $RP^1 \times S^1$, в котором все окружности отождествляются в двух своих противоположных точках. Следовательно, в отображении намотки плоскости на сферу все центрально-симметричные евклидовы прямые наматываются на соответствующие им окружности сферы в соответствии с отображением:

$$\mathbb{R} \to S^1 : e^{i\pi x} = e^{\pm i\pi\rho} \tag{2.2}$$

Отображение намотки евклидова пространства на сферу допускает расширение в произвольную размерность, но мы обращаем ваше внимание лишь на тот случай, когда 3-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ порождается произведением $RP^2 \times \mathbb{R}$, а 3-мерная сфера порождается произведением $RP^2 \times S^1$, где на них наложены такие же метрические и топологические условия, т.е. требование евклидовой жесткости всех прямых и отождествления всех окружностей в двух противоположных точках. Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ наматывается на S^3 таким же естественным образом, т.е. по аналогии с 2.1. Действительно, для этого требуется длине радиус–вектора евклидова пространства поставить в соответствие угловую координату сферы, которая измеряется по модулю 2π, т.е. широту. Иначе говоря, достаточно принять, что

$$\theta_1 = \vartheta, \quad \theta_2 = |\varphi| \mod \pi, \quad \phi = |\pm \pi\rho| \mod 2\pi, \tag{2.3}$$

где выбор знака обусловлен координатой широты евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Пусть теперь на псевдоевклидовой плоскости с координатами (x_0, x_1) задан ортонормированный базис (e_0, e_1), а цилиндр $\mathbb{R} \times S^1$ имеет координаты (ϕ, r). Тогда самым простым отображением псевдоевклидовой плоскости на цилиндр является соответствие $\phi = |\pi(x_0 + x_1)| \mod 2\pi$, $r = x_0 - x_1$, т.е. такое отображение, которое одну изотропную прямую наматывает на направляющую окружность цилиндра, а вторую изотропную прямую отождествляет с образующей цилиндра. Действительно, в таком случае всякому ненулевому (неизотропному) вектору плоскости можно поставить в соответствие определенную координату цилиндра. Так, если вектор x с координатами (x_0, x_1) образует гиперболический угол φ с осью x_0, то

$$\phi = |\pm \pi e^{-\varphi}\rho| \mod 2\pi = |\pi(x_0 + x_1)| \mod 2\pi, \tag{2.4}$$

если же вектор x образует гиперболический угол φ с осью x_1, то

$$r = \pm e^{\varphi}\rho = x_0 - x_1, \tag{2.5}$$

где $\varphi = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x_0+x_1}{x_0-x_1}\right| = -\ln\left|\frac{x_0+x_1}{\rho}\right|$, $\rho = |(x_0 + x_1)(x_0 - x_1)|^{1/2}$. Аналогично строится отображение намотки тора псевдоевклидовой плоскостью. Отличие лишь в том, что вторая изотропная прямая наматывается на вторую задающую окружность тора.

Пусть теперь дано 4-мерное псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^4$ с сигнатурой $(-,+,+,+,)$ его базиса $(e_0, e_1, e_2, e_3,)$, и пусть дано произведение $\mathbb{R}^3 \times S^1$, в котором компонента $\mathbb{R}^3$ это евклидово пространство, т.е.

$\mathbb{R}^3\times S^1 = PR^2\times\mathbb{R}\times S^1 = PR^2\times S^1\times\mathbb{R} = S^3\times\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ евклидова прямая. Тогда, для того чтобы намотать пространство $\mathbb{R}^4$ на цилиндр $\mathbb{R}^3\times S^1$, необходимо взять в $\mathbb{R}^4$ произвольную псевдоевклидову плоскость, проходящую через ось x_0 и произвольную прямую x_k, ортогональную вектору e_0. Затем плоскость (x_k, x_0) необходимо намотать на соответствующий цилиндр с координатами (ϕ_k, r_k), причем, поскольку индекс k является элементом проективного пространства RP^2, то, пробегая все возможные плоскости, мы получим искомое отображение намотки:

$$\phi_k = |\pm\pi e^{-\varphi}\rho| \mod 2\pi = |\pi(x_k + x_0)| \mod 2\pi, \tag{2.6}$$

$$r_k = \pm e^{\varphi}\rho = x_k - x_0. \tag{2.7}$$

Таким образом, мы получили отображение частичной компактификации пространства Минковского $\mathbb{R}^4$ в цилиндрическое многообразие $\mathbb{R}^3\times S^1$, в котором световой конус отображается в трехмерное евклидово пространство $\{r_k\}_{RP^2}$ и трехмерную сферу $\{\phi_k\}_{RP^2}$, соприкасающиеся в нулевой точке. При этом, если в цилиндре $\mathbb{R}^3\times S^1$ намотать на сферу S^3 евклидово подпространство $\mathbb{R}^3$, то можно получить отображение полной компактификации пространства Минковского $\mathbb{R}^4$ в произведение сфер $S^3\times S^1$.

Обратимся теперь к вопросу о сравнении базисов псевдоевклидовой плоскости, намотанной на цилиндр. Хорошо известно, что все ортонормированные базисы псевдоевклидовой плоскости эквивалентны, и поэтому нет никакой возможности выделить какой-то один базис из этого класса как эталонный. Однако, если на псевдоевклидовой плоскости задать постоянное единичное векторное поле c, то можно получить выделенный ортонормированный базис (c, c_1). В свою очередь, переменное единичное векторное поле $g(x)$, составляющее гиперболический угол $\varphi(x)$ с векторным полем c, индуцирует в каждой точке псевдоевклидовой плоскости, намотанной на цилиндр, ортогональный репер $(g'(x), g_1'(x))$, нормированный цилиндрическими координатами. Действительно, имея ввиду ортонормированность репера $(g(x), g_1(x))$ и нормируя орт $g(x)$ азимутальной цилиндрической координатой (равной π), а орт $g_1'(x)$ линейной цилиндрической координатой (равной 1):

$$\pi = |\pm\pi e^{-\varphi}\rho(e^{\varphi}g)| \mod 2\pi = |\pm\pi e^{-\varphi}\rho(g')| \mod 2\pi, \tag{2.8}$$

$$1 = e^{\varphi}\rho(e^{-\varphi}g_1) = e^{\varphi}\rho(g_1'), \tag{2.9}$$

мы получим из ортонормированного репера $(g(x), g_1(x))$ репер $(g'(x), g_1'(x))$, нормированный в соответствии с формулами:

$$g'(x) = e^{\varphi}g(x), \quad g_1'(x) = e^{-\varphi}g_1(x). \tag{2.10}$$

Тем самым, единичное векторное поле $g(x)$ индуцирует на псевдоевклидовой плоскости, намотанной на цилиндр, 2–мерное псевдориманово многообразие с метрическим тензором g'_{ij}, где $i, j = 0, 1$, равным матрице Грама системы векторов $(g'(x), g'_1(x))$. Аналогично, единичное векторное поле $g(x)$, заданное в пространстве Минковского, намотанном на цилиндр $\mathbb{R}^3 \times S^1$, индуцирует 4–мерное псевдориманово многообразие. Действительно, достаточно взять ортонормированный репер (g, g_1, g_2, g_3), полученный гиперболическим поворотом пространства Минковского на угол $\varphi(x)$ в плоскости $(g(x), c)$ и помещением в эту же плоскость орта g_1. Тогда матрица Грама g'_{ij}, где $i, j = 0, 1, 2, 3$, системы векторов $\{e^{\varphi} g, e^{-\varphi} g_1, g_2, g_3\}$ будет служить метрикой соответствующего псевдориманова многообразия. Заметим при этом, что поскольку определитель Грама этой системы равен единице, то индуцированная метрика сохраняет объем, т.е. дифференциальный элемент объема нашего многообразия равен соответствующему элементу объема пространства Минковского.

3 Динамика модели

В качестве материального (и одновременно метафизического) содержания модели мы используем представление о динамике векторного поля $u(x, \tau)$ скоростей частичек движущейся материи, заданного на поверхности цилиндра $\mathbb{R}^3 \times S^1$. Динамика векторного поля $u(x, \tau)$ определяется принципом максиимальности 4-объема, переносимого потоком частичек движущейся материи за некоторое конечное время T через произвольную область Σ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с заданными начальными и граничными условиями, а именно:

$$\delta \int_0^T \int_\Sigma dV \wedge u(x, \tau) d\tau = 0, \tag{3.1}$$

где dV – дифференциальный элемент объема 3-поверхности Σ. Иначе говоря, мы постулируем принцип максимальности массы частичек, переносимых потоком движущейся материи через поверхность измерения (поверхность наблюдателя, лежащую в $\mathbb{R}^3$), за конечный промежуток времени.

Вместе с тем, поскольку отображение намотки пространства Минковского на цилиндр $\mathbb{R}^3 \times S^1$ позволяет динамическую задачу на цилиндре свести к статической задаче в пространстве Минковского, то принципу максимальности 4-объема динамического потока, заданного на цилиндрическом многообразии векторным полем $u(x, \tau)$, соответствует принцип максимальности 4-объема потока, заданного в пространстве Минковского векторным полем $g(x)$, а именно:

$$\delta \int_0^{x_0} \int_{\Sigma'} dV \wedge g(x) dx_0 = 0, \tag{3.2}$$

где нулевой орт совпадает с вектором c, определяющим постоянное (вакуумное) векторное поле, а все 3-поверхности наблюдателя Σ' лежат в ортогональных к c евклидовых подпространствах пространства Минковского.

Пусть теперь в $\mathbb{R}^4$ задан такой ортонормированный базис $(c_i) = (c_0, c_1, c_2, c_3)$, что $c_0 = c$, и пусть там также задано такое реперное расслоение, что каждой неособой точке поставлен в соответствие неортонормированный репер $(g_i(x)) = (g_0, g_1, g_2, g_3)$, где $g_0 = g(x)$, $g_1 = c_1$, $g_2 = c_2$, $g_3 = c_3$. Из скалярного произведения (c_i, g_j) пар векторов базиса (c_i) и репера (g_i) сформируем матрицу (g_{ij}) и вычислим ее определитель $\det(g_{ij})$, модуль которого равен объему параллелепипеда, образованного системой векторов $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$, и одновременно равен скалярному произведению $(g(x), c)$. Вместе с тем, имеет место равенство $(g(x), c)^2 = |\det G(x)|$, где $G(x)$ — матрица Грама системы векторов $(g_i(x))$. Следовательно уравнение 3.2 эквивалентно вариационному уравнению:

$$\delta \int_\Omega (g(x), c) dx^4 = \delta \int_\Omega |\det G(x)|^{\frac{1}{2}} dx^4 = 0, \tag{3.3}$$

где dx^4 есть дифференциальный элемент объема 4-мерной цилиндрической области Ω пространства Минковского, которая имеет высоту T а в качестве ее основания используется 3-поверхность Σ с граничным начальным условием $g(x) = c$. Для того чтобы получить дифференциальное уравнение, которое удовлетворяет интегральному вариационному уравнению 3.3, мы должны локализовать область интегрирования Ω. Пусть в некоторой точке пространства Минковского даны предельно малый параллелепипед $\Delta\pi$, построенный на векторах $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, и векторная трубка ω, основание которой составляет грань параллелепипеда, образованная векторами $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, а ее объем заполнен векторами $|\Delta x_0| g(x)$, полученными из линий тока векторного поля $g(x)$ приращением натурального параметра на величину $|\Delta x_0|$. Тогда, в результате локализации уравнения 3.3, мы получим вариационное уравнение:

$$\delta \int_{\Delta\pi} |\det G(x,t)|^{\frac{1}{2}} dx^4 = \delta \operatorname{Vol} \omega = 0. \tag{3.4}$$

Но поскольку линии тока неголономных векторных полей не параллельны даже локально, то локальным шевелением (вариацией) неголономного поля $g(x)$, увеличивающим или уменьшающим его неголономность, мы получим ненулевую вариацию объема $\mathrm{Vol}\,\omega$. В то же время, вариации голономного поля $g(x)$ не нарушают его локальную параллельность, и поэтому голономность векторного поля $g(x)$ доставляет необходимое условие для нулевой вариации объема $\mathrm{Vol}\,\omega$. Достаточным условием нулевой вариации объема векторной трубки ω является требование минимальности поверхностей, ортогональных голономному единичному векторному полю $g(x)$, которое на языке дифференциальных форм выражается уравнением:

$$d \star g^*(x) = 0, \tag{3.5}$$

где d — внешний дифференциал, $\star$ — оператор Ходжа.

Однако, надо понимать, что пространство реального наблюдателя искривлено, поскольку линия измерения времени и поверхность измерения пространственных координат задается векторным полем $g(x)$, а именно, его линии тока служат для измерения времени а ортогональные ему поверхности служат для измерения пространственных координат. Кроме того, реальный наблюдатель не видит доступного абсолютному наблюдателю поля $g(x)$. Поэтому, если мы хотим получить вариационное уравнение, связанное с реальным наблюдателем, то должны определить его в псевдоримановом многообразии M, индуцированном векторным полем $g(x)$. Метрика многообразия M задается матрицей Грама системы из четырех касательных векторов, а именно: касательной к линии тока $x_0'(\phi)$, параметризованной угловой координатой цилиндрического многообразия, и трех касательных к координатным линиям ортогональной 3-поверхности $x_1'(r), x_2'(r), x_3'(r)$, параметризованным евклидовой длиной цилиндрического многообразия. Заметим также, что если постулировать принцип минимальности формы гиперболической кривизны:

$$\delta \int_\Omega (\nabla\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt)^2 dx^4 = 0, \tag{3.6}$$

где dx^4 есть дифференциальный элемент объема пространства Минковского, то гравитационный потенциал $\varphi(x,t)$ будет решением трехмерного волнового уравнения, а само уравнение 3.6 можно сопоставить с вариационным уравнением, которое обычно записывают для функционала действия Гильберта-Эйнштейна:

$$\delta \int_{\Delta M} R dV = 0 \tag{3.7}$$

где R – скалярная кривизна, dV – дифференциальный элемент объема многообразия M.

Вернемся, однако, к точке зрения абсолютного наблюдателя и обратимся к динамике особенностей векторного поля $g(x)$. Пусть в пространстве Минковского траектория особенности $X(\tau)$, параметризованная абсолютным временем и имеющая постоянную по модулю скорость $\dot{X}$, где $|\dot{X}| = \frac{1}{m}$, определяется вариационным уравнением:

$$\delta \int_{X(0)}^{X(T)} m(g^*(x), dx) = \delta \int_0^T (g(x), \dot{X}) d\tau = 0, \tag{3.8}$$

где траектория особенности $X(\tau)$ варьируется в пространстве Минковского, в котором задано внешнее векторное поле $g(x)$. Заметим при этом, что в псевдоримановом многообразии M, индуцированном векторным полем $g(x)$, уравнению 3.8 соответствует вариационное уравнение

$$\delta \int_l m|dx| = 0, \tag{3.9}$$

где варьируется траектория особенности l. Если в интегральном уравнении 3.8 взять малый интервал времени, то оно сводится к уравнению:

$$\ddot{X} = \kappa = \nabla\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt, \tag{3.10}$$

которое означает, что касательный к траектории вектор должен сохранять гиперболический угол наклона к внешнему векторному полю. Возьмем теперь в евклидовом подпространстве пространства Минковского ортогональную проекцию траектории особенности $x(\tau) = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^3} X(\tau)$ и формы кривизны поля $g(x)$ равную $\nabla\varphi(x) = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^3} \kappa$. Тогда из уравнения 3.10 получается простое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}(\tau) = \nabla\varphi(x), \tag{3.11}$$

которое в классической механике Ньютона означает, что ускорение материальной точки во внешнем гравитационном поле не зависит от ее массы.

4 Некоторые следствия модели

Посмотрим теперь как в классическом приближении видится мир реальному наблюдателю, которого мы свяжем с особенностью. Прежде всего заметим, что реальный наблюдатель, имеющий прямолинейную траекторию в пространстве Минковского, не видит определяющего абсолютный вакуум вектора c, и поэтому не может измерить время t. Вместе с тем, измеряя скорости других прямолинейно и равномерно движущихся особенностей, он убеждается, что произвольное единичное векторное поле c', заданное в пространстве Минковского, может быть взято в качестве эталона для измерения времени и пространственных координат. Тем самым, реальный наблюдатель делает вывод, что пространственно–временной континуум является понятием относительным. Далее заметим, что реальный наблюдатель не видит ни единичного векторного поля $g(x)$, ни его отклонений от вектора c, но он видит, что ускорением особенностей в пространстве наблюдателя можно измерить градиент скалярного поля гравитации. Кроме того, реальный наблюдатель, помещенный во внешнее скалярное поле, сможет обнаружить псевдориманово многообразие, индуцированное единичным векторным полем $g(x)$. Действительно, если он измерит масштабы времени и расстояний в точках пространства наблюдателя с разными значениями скалярного поля, то заметит деформацию этих масштабов. Тем самым, реальному наблюдателю представляется, что скалярное поле является причиной деформации плоского псевдоевклидова пространства, превращающей его в псевдориманово многообразие, причем он видит, что локальная деформация многообразия устраняется ускорением особенности, откуда он делает вывод, что траектории особенности есть геодезические этого многообразия.

Таким образом, мы построили модель, в которой динамика топологической особенности соответствует динамике материальной точки в поле тяготения. Кроме того, статический потенциал топологической особенности, согласованный с индуцированной им метрикой, свпадает с ньютоновым потенциалом материальной точки. Действительно, на расстоянии r от центра центральносимметричного скалярного поля $\varphi = \frac{m}{r}$ особенности индуцированная им метрика равна:

$$ds^2 = e^{2\varphi}dt^2 - e^{-2\varphi}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{4.1}$$

что в силу приблизительного равенства $e^{2\varphi} \approx 1 + 2\varphi$, справедливого при малых значениях φ, соответствует метрическому тензору гравитационного поля материальной точки. Следует также отметить, что в нашей модели гравитации отсутствуют черные дыры. Действительно, метрика, индуцированная гиперболической кривизной векторного поля, эквивалентна соответствующей деформации световых конусов, лежащих в каждой точке пространства Минковского. В свою очередь, локально деформация светового конуса вызывает увеличение скорости света (т.е. тангенса угла наклона изотропной прямой, лежащей на световом конусе, к оси времени), выпущенного из центра этого конуса, причем максимальное значение модуля скорости света равно:

$$|c'| = |c|e^{2\varphi(x)}, \tag{4.2}$$

где $\varphi(x)$ – значение гиперболической кривизны векторного поля в точке центра конуса x. Следовательно, поскольку модуль скорости света не является константой, то сопутствующее черным дырам понятие горизонта событий в нашей модели отсутствует. Вместе с тем, наряду со следствиями локального характера, наша модель обладает еще и некоторыми глобальными свойствами, например, если предположить, что вакуумное векторное поле c эволюционирует и при этом гиперболический угол между вакуумным векторным полем в начальный и настоящий момент эволюции линейно зависит от времени эволюции $\varphi(\tau) = H\tau$, тогда константу H мы можем связать с космологическим фактором, в котором легко угадывается постоянная Хаббла.

Предположим теперь, что простанство Минковского $\mathbb{R}^4$ есть всего лишь видимая часть пространства более четырех измерений, а точнее, пусть $\mathbb{R}^4$ служит базой некоторого расслоения. Рассмотрим, например, расслоение $\mathbb{R}^4 \times S^1$, в котором векторное поле исследуемого нами потока движущейся материи не параллельно базе расслоения, причем гиперболические углы (измеряемые в накрытии расслоения $\mathbb{R}^4 \times S^1$) между этим векторным полем и ортами базиса пространства Минковского составляют векторный потенциал $A(x)$. Пусть векторный потенциал $A(x)$ так воздействует на движение топологической особенности, что абсолютное время движения особенности по пути l:

$$T = \int_l m|dx| \tag{4.3}$$

должно быть скорректировано и с учетом поправки равно времени движения особенности во внешнем поле векторного потенциала:

$$T = \int_l m|dx| + \int_l (eA^*(x), dx), \tag{4.4}$$

где e – является параметром собственного векторного потенциала особенности. А поскольку из всех возможных путей топологическая особенность движется по тому пути, который обеспечивает наименьшее абсолютное время движения, то мы получили полную аналогию с движением заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Допустим теперь, что в векторном потенциале $A(x)$ все компоненты кроме нулевой равны нулю. Тогда для абсолютного времени движения топологической особенности справедливо выражение

$$T = \int_0^t m\sqrt{1-v^2}dt + \int_0^t eA_0^*(x)dt, \tag{4.5}$$

где $v = \frac{dx}{dt}$, и следовательно имеет место формула:

$$\frac{dT}{dt} = m\sqrt{1-v^2} + eA_0^*(x), \tag{4.6}$$

которая при малых скоростях приводится к виду:

$$L = \frac{dT}{dt} = \frac{mv^2}{2} - U(x), \tag{4.7}$$

где $U(x) = -eA_0^*(x)$, совпадающему с лагранжианом $L = \frac{dS}{dt}$ материальной точки во внешнем электрическом поле. Заметим также, что если к векторному потенциалу применить принцип минимальности квадрата его формы кривизны:

$$\delta \int d^2 A^*(x) dv = 0, \tag{4.8}$$

то мы получим еще и уравнения Максвелла в пустом пространстве.

Обратимся теперь к тем свойствам нашей модели гравитации, которые проявляются в силу того, что в процессе эволюции пространство Минковского наматывается на цилиндрическое многообразие $\mathbb{R}^3 \times S^1$, точнее говоря, евклидово пространство наблюдателя $\mathbb{R}^3$ прокатывается по цилиндрическому многообразию $\mathbb{R}^3 \times S^1$. В рамках данного эволюционного процесса имеет смысл говорить о фазовом масштабе абсолютного времени эволюции τ:

$$\phi = \frac{\pi}{h}\tau = \frac{\pi(x+t)}{h}, \tag{4.9}$$

где ϕ – азимутальная координата цилиндрического многообразия, x, t – координаты плоскости (x, t) пространства Минковского, h – коэффициент масштабирования. Фазирование абсолютного времени означает, что оно расщепляется (квантуется) и в моменты времени $\tau_n = \frac{hn}{\pi}$, где $n \in N$, евклидово пространство наблюдателя ложится на свое место в цилиндрическом многообразии. По этой причине с точки зрения наблюдателя наиболее вероятны события, временная продолжительность которых кратна величине $\frac{h}{\pi}$.

Далее мы исследуем процесс случайного блуждания особенности на поверхности цилиндрического многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$. Однако прежде сделаем одно математическое замечание, имеющее непосредственное отношение к этому вопросу. Пусть дана некоторая плотность распределения вероятности на прямой, т. е. такая функция $\rho(x)$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1. \tag{4.10}$$

Для случайной величины $e^{i\pi x}$, возникающей при компактификации прямой в окружность, вычислим стандартным образом матожидание

$$M(e^{i\pi x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(e^{i\pi x})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi x}\rho(x)dx = pe^{i\pi\alpha}. \tag{4.11}$$

Тогда величина $pe^{i\pi\alpha}$, которую мы назовем комплексной амплитудой вероятности, содержит в себе две характеристики распределения случайной величины, а именно, матожидание $e^{i\pi\alpha}$ как таковое и сосредоточенность p плотности распределения; т. е., интенсивность матожидания. Действительно, если $\rho(x) = \delta(\alpha)$, то $M(e^{i\pi x}) = 1 \cdot e^{i\pi\alpha}$, если же $\rho(x)$ имеет равновероятное распределение по всей прямой, то $M(e^{i\pi x}) = 0$.

Итак, какие траектории особенности $X(\tau)$ реализуются в пространстве Минковского, которое наматывается на поверхность цилиндрического многообразия? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, мы применим процедуру, восходящую к Фейнману. Пусть вероятностное поведение особенности описывается марковским процессом случайного блуждания на поверхности цилиндрического многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$, в котором элементарным событием является свободный пробег. В пространстве Минковского этому случайному событию соответствует случайное время свободного пробега $\Delta\tau$ и случайный вектор свободного пробега $\Delta X = (\Delta x, \Delta t)$, где Δx – его проекция в евклидовом пространстве наблюдателя, Δt – его проекция на ось времени наблюдателя, а отношение двух случайных величин $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ формирует случайнй вектор скорости свободного пробега v. Вместе с тем, для событий, которые наблюдаются с евклидова пространства, прокатываемого по поверхности цилиндрического многообразия $\mathbb{R}^3 \times S^1$, свободному пробегу особенности соответствует такая случайная величина как фазовое время свободного пробега особенности:

$$\Delta\phi = \frac{\pi\Delta\tau(x)}{h} = \frac{\pi L(x)\Delta t}{h}. \tag{4.12}$$

Кроме того, пусть распределение плотности вероятности случайной величины фазового времени подчинено закону, который без учета нормировочного множителя выражается показательной формулой $\rho(\Delta\phi) = e^{-\Delta\phi}$, а следовательно для случайной величины $e^{i\Delta\phi}$ мы будем иметь соответствующую плотность вероятности

$$\rho(e^{i\Delta\phi}) = e^{-\Delta\phi}e^{i\Delta\phi}. \tag{4.13}$$

Откуда, с учетом свойств марковского процесса, получим плотность вероятности, реализуемой за произвольное число случайных блужданий, а именно:

$$\rho(e^{i\phi}) = \prod_{0}^{t} e^{-\frac{\pi L(x)\Delta t}{h}} e^{i\frac{\pi L(x)\Delta t}{h}} = \exp\left(-\frac{\pi}{h}\int_0^t L(x)dt\right)\exp\left(\frac{i\pi}{h}\int_0^t L(x)dt\right). \tag{4.14}$$

Для получения математического ожидания случайной величины $e^{i\phi}$ необходимо еще просуммировать по всем возможным траекториям, т.е. вычислить величину

$$M(e^{i\phi}) = \sum \exp\left(-\frac{\pi}{h}\int_0^t L(x)dt\right)\exp\left(\frac{i\pi}{h}\int_0^t L(x)dt\right). \tag{4.15}$$

Если теперь принять во внимание, что на больших интервалах времени всякая ненулевая вариация фазового времени особенности имеет почти нулевую интенсивность переходной вероятности такого события, в то время как нулевая вариация дает ненулевую интенсивность, то отсюда следует, что суммарное время движения особенности должно быть минимальным. Таким образом, в случае большого интервала времени, особенность имеет определенную траекторию, являющююся решением вариационного уравнения, которое в классической механике определяет динамическое поведение материальной точки. В свою очередь, на малых интервалах времени особенность описывается комплексной амплитудой вероятности, динамика которой задается уравнением диффузии, совпадающим с уравнением Щредингера квантовой механики.

Обратимся, наконец, к вопросу об измерении реальным наблюдателем величины h, которая по определению (с точки зрения абсолютного наблюдателя) равна измеренной на цилиндре фазовой (угловой) длине одного витка интегральной линии векторного поля c. Однако, поскольку метрику, индуцированную векторным полем $g(x)$, мы строили так, чтобы измерение на цилиндре фазовой (угловой) длины одного витка интегральной линии векторного поля $g(x)$ давало постоянную величину, то величина h сохраняется и является константой также и для реального наблюдателя в произвольной точке псевдориманова многообразия, индуцированного полем $g(x)$ или ускорением наблюдателя. Тем самым, если величину h сопоставить постоянной Планка, измерение которой не зависит ни от силы тяготения, оказываемой на наблюдателя, ни от ускорения наблюдателя, то мы увидим, что абсолютное значение величины h нашей модели согласовано с абсолютным значением (в качестве мировой константы) постоянной Планка.

5 Заключение

Итак, нами предпринята попытка описания динамики пространства–времени и частиц с помощью динамики векторного поля цилиндрического многообразия, которая задается принципом максимума массы потока этого поля. Сравнение следствий нашей модели с фундаментальными физическими принципами позволяет сделать вывод о том, что мы нашли свой путь в многочисленных подходах к объединению теории тяготения и квантовой теории. Вместе с тем, многие свойства нашей модели остались неизученными, например, еще требует рассмотрения вопрос об описании флуктуаций потока, нарушающих минимальность векторного поля движущейся материи. Однако, некоторые свойства модели могут открыться только на многообразии $\mathbb{R}^3 \times S^3 \times S^1$, в частности, ожидается, что в рамках такой расширенной модели можно будет дать геометрическую интерпретацию всем калибровочным полям. С точки зрения космологических аспектов векторной модели гравитации было бы интересно также изучить динамику минимального единичного векторного поля семимерной сферы.

Список литературы

[1] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, Уравнения математической физики, М., 2000.

[2] Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, М., 2002.

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика.

[4] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967.

[5] Birkhoff G. D., Flat space–time and gravitation, 1944, Proc. Nat. Acad. Sci., v. 30 No. 10.

[6] O. Klein, Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie, Zeits. Phys. 37 (1926) 895.