

О параллелепипедах в алгебре и топологии

Баяк И. В.

Аннотация

Концепцию применения параллелепипедов можно найти в таких разделах математики как комбинаторный анализ, полилинейная алгебра и алгебраическая топология. Действительно, последовательности ребер n -мерного параллелепипеда, натянутого на базис n -мерного пространства, изоморфны подстановкам. В свою очередь, вычисление ориентированного объема параллелепипеда как полилинейной функции, принимающей нулевое значение на линейно зависимых векторах, приводит к понятию знакопеременного полилинейного произведения. Наконец, параллелепипеды легко могут складываться в клеточные пространства и образовывать цепные комплексы с группой гомологий в качестве топологического инварианта этих пространств. Имея в виду вышеперечисленные проникновения геометрии в алгебру и топологию, мы будем здесь последовательно развивать алгебро-топологический формализм, имеющий отношение к параллелепипедам, а затем найдем ему применение в решении проблемы классификации замкнутых ориентируемых многообразий произвольной размерности.

1 Подстановки

Прежде всего обратимся к основаниям комбинаторного анализа, т. е. к понятию отображения множеств, где устоялись классические определения, и поэтому нам будет достаточно сослаться на университетский учебник, например, [1]. Однако, даже классические представления иногда допускают определенную модернизацию. Действительно, пусть дана такая тройка множеств (A, B, F) , что $F = \{(a, b)\} \neq \emptyset$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда мы определим неклассическое понятие отображения F с классическим обозначением $f : A \rightarrow B$, имея в виду, что каждая пара из F может быть представлена стрелкой соответствия $a \rightarrow b$, где $b = f(a)$ для однозначного соответствия и $b \in f(a)$ для многозначного соответствия.

Вместе с тем, триплет (B, A, F^{-1}) , где имеет место обращение всех стрелок, задает обратное отображение. Если $\forall a \exists b (f(a) = b)$, то мы говорим об однозначном отображении всего A и тем самым возвращаемся к классическому представлению об отображении. Сужением отображения F на $A' \subset A$ мы назовем такое отображение $f' = f|_{A'} : A' \rightarrow B$, которое соответствует триплету (A', B, F') , где включение $F' \subset F$ порождается включением $A' \subset A$; т.е., исключением из F стрелок, выходящих из подмножества $A \setminus A'$.

Расширение понятия отображения влечет за собой расширение таких понятий как инъективное и сюръективное отображение. Инъективным отображением можно было бы назвать такое F , которое своим первым аргументом исчерпывает A , и в котором нет сходящихся стрелок, т.е. отсутствуют пары $(x, b), (y, b)$, иначе говоря, $\forall x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \cap f(y) = \emptyset$. В свою очередь, сюръективным отображением можно было бы назвать такое F , которое своим вторым аргументом исчерпывает B , и в котором нет расходящихся стрелок, т.е. отсутствуют пары $(a, x), (a, y)$, иначе говоря, $\forall b \exists a (f(a) = b)$. Квазиинъективным отображением можно назвать такое F , которое исчерпывает A , и в котором нет расходящихся стрелок, иначе говоря, $\forall a \exists b (f(a) = b)$. Квазисюръективным отображением можно назвать такое F , которое исчерпывает B , и в котором нет сходящихся стрелок, иначе говоря, $\forall b \exists! a (f(a) = b)$. Наконец, строго инъективным отображением можно назвать отображение, инъективное в классическом смысле, т.е. такое, что $\forall x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Аналогично, строго сюръективным отображением можно назвать отображение, сюръективное в классическом смысле. Вместе с тем, в понятие биективного отображения мы, по-прежнему, вкладываем классический смысл.

Логические связи между всеми этими типами отображений отражены в нижеследующих очевидных утверждениях.

1.1 Предложение. *Биективное отображение одновременно инъективно и сюръективно*

1.2 Предложение. *Сужение биекции строго инъективно*

1.3 Предложение. *Отображение, обратное инъективному (квазиинъективному), является сюръекцией (квазисюръекцией)*

Теперь, в рамках вышепринятого формализма, нам будет легко определить основные комбинаторные понятия. Действительно, если произвольную биекцию из триплета (A, A, F) называть подстановкой, а простейшую подстановку — транспозицией, то размещение без повторений

можно определить как строгую инъекцию, а размещение с повторениями — как квазиинъекцию. Примем также удобную нам систему обозначений. Если заданы множества $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, m\}$, где $m \leq n$, тогда отображение $/J/ := /i_1, \dots, i_j, \dots, i_m/ : J \rightarrow J$ пусть обозначает произвольную подстановку m элементов множества J , а $\text{sgn } /J/$ — знак четности этой подстановки; отображение $[J] := [i_1, \dots, i_j, \dots, i_m] : J \rightarrow I$ пусть обозначает произвольное размещение из n по m с повторением. Отображение $\langle J \rangle := \langle i_1, \dots, i_j, \dots, i_m \rangle : J \rightarrow I$ обозначает произвольное размещение из n по m без повторений; отображение $(J) := (i_1, \dots, i_j, \dots, i_m) : J \rightarrow I$ пусть обозначает произвольное упорядоченное размещение, т. е. такое $\langle J \rangle$ в котором $i_j < i_{j+1}$. Наконец, если множество $\{J\} := \{i_1, \dots, i_j, \dots, i_m\}$ обозначает у нас производное от (J) подмножество I , состоящее из m элементов образа размещения (J) , тогда отображение $/(J)/ := /(i_1, \dots, i_j, \dots, i_m)/ : \{J\} \rightarrow \{J\}$ пусть обозначает произвольную подстановку элементов множества $\{J\}$, соответственно $\text{sgn } /(J)/$ — знак четности этой подстановки.

Пусть отображение $/(J)\hat{i}_j/ : (i_1, \dots, i_j, \dots, i_m) \rightarrow (i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_m)i_j$ обозначает производную от (J) и произвольного элемента $\{J\}$ подстановку изъятия этого элемента, в результате которой элемент i_j переходит в конец а остальные элементы, после переноса i_j , остаются упорядоченными по возрастанию. Наряду с изъятием элемента из упорядоченного множества можно рассматривать присоединение элемента с последующим упорядочиванием. Тогда мы получим подстановку $/(J)\check{k}/$, где $k \in \{J'\} = I \setminus \{J\}$, которую следует понимать как подстановку упорядочивания множества $\{(J), k\}$. Все эти подстановки обладают свойством антикоммутативности их четностей, так что $\text{sgn } /(J)\hat{i}_j\hat{i}_k/ = -\text{sgn } /(J)\hat{i}_k\hat{i}_j/$, а $\text{sgn } /(J)\check{j}\check{k}/ = -\text{sgn } /(J)\check{k}\check{j}/$.

Рассмотрим, наконец, подстановки частичного нарушения упорядоченности множества I . Принимаем, что образ подстановки $/J, J'/ : I \rightarrow \{(J), (J')\}$, где $\{J'\} = I \setminus \{J\}$, образован множествами $\{J\}$ и $\{J'\}$, упорядоченными по отдельности, а подстановка $/(J, J')/ : \{(J), (J')\} \rightarrow \{(J'), (J)\}$ подразумевает перестановку упорядоченных множеств. Тогда, поскольку $/J', J/ = /J, J'/ * /(J, J')/$ а $\text{sgn } /(J, J')/ = (-1)^{m(n-m)}$, то мы получим равенство $\text{sgn } /J, J'/ \cdot \text{sgn } /J', J/ = (-1)^{m(n-m)}$.

2 Знакопеременные произведения

Алгебра знакопеременных полилинейных произведений хорошо изучена, и поэтому можно сослаться, например, на соответствующую главу в [2] или [8]. Здесь же мы, используя понятие четности частично упорядо-

ченных подстановок и подстановок изъятия (присоединения), коснемся лишь отдельных вопросов.

Прежде всего обратимся к полилинейным произведениям в целом. Пусть \mathbb{L} означает n -мерное линейное пространство над \mathbb{R} а $(e^i)_I$ — его базис. Пусть также $\mathbb{T}^m(\mathbb{L})$ означает n^m -мерное пространство над \mathbb{R} а $(e^{[J]})_{\{[J]\}}$ — его базис. Тогда мы можем явно представить тензорное полилинейное произведение, если запишем

$$x^1 \otimes \cdots \otimes x^m : \mathbb{L}^m \rightarrow \mathbb{T}^m(\mathbb{L}) : (x^1, \dots, x^m) \rightarrow \sum_{\{[J]\}} \prod_{i_j \in [J]} x_{ij} e^{[J]},$$

где x_{ij} означает j -ю координату вектора x^i . Поскольку $e^{[i_1]} \otimes \cdots \otimes e^{[i_m]} = e^{[J]}$, то линейная оболочка множества $\{e^{[i_1]} \otimes \cdots \otimes e^{[i_m]}\}_{\{[J]\}}$ изоморфна тензорному линейному пространству $\mathbb{T}^m(\mathbb{L})$.

Сформируем теперь два знакопеременных полилинейных произведения, а именно, внешнее произведение

$$x^1 \wedge \cdots \wedge x^m : \mathbb{L}^m \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{L}) : \\ (x^1, \dots, x^m) \rightarrow \sum_{\{[J]\}} e^{[J]} \sum_{\{/(J)/\}} \text{sgn } / (J) / \prod_{i_j \in / (J) /} x_{ij} = \sum_{\{[J]\}} \det(x_{ij})_J^{\{J\}} e^{[J]},$$

где $\Lambda^m(\mathbb{L})$ это пространство поливекторов, изоморфное линейной оболочке множества $\{e^{(i_1 \wedge \cdots \wedge e^{i_m})}\}_{\{(J)\}}$; и векторное произведение

$$x^1 \times \cdots \times x^m : \mathbb{L}^m \rightarrow \Lambda^{n-m}(\mathbb{L}) : \\ (x^1, \dots, x^m) \rightarrow \sum_{\{[J']\}} \text{sgn } / J, J' / \det(x_{ij})_J^{\{J\}} e^{[J']},$$

где $\{J'\} = I \setminus \{J\}$. Всем этим произведениям гарантирована знакопеременность, поскольку при транспозиции произвольной пары векторов из набора (x^1, \dots, x^m) знаки четностей всех подстановок $/(J)/$ меняются на противоположные. Кроме того, для них справедливо

2.1 Предложение. Система векторов (x^1, \dots, x^m) линейно зависима тогда и только тогда, когда $x^1 \wedge \cdots \wedge x^m = x^1 \times \cdots \times x^m = 0$

Действительно, с одной стороны, если система (x^1, \dots, x^m) линейно зависима, то $\det(x_{ij})_J^{\{J\}} = 0 \quad \forall (J) \in \{(J)\}$, с другой стороны, если система (x^1, \dots, x^m) линейно независима, то с помощью элементарных преобразований системы и перестановок элементов базиса (e^1, \dots, e^n) матрица $(x_{ij})_J^I$ приводится к трапецеидальному виду с m ненулевыми строками и

ненулевой диагональю $(x_{ii})_J$, в силу чего $\det(x_{ij})_J \neq 0$. Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что элементарные преобразования сохраняют независимость системы векторов и одновременно сохраняют равенство (неравенство) нулю определителя, а подстановки базиса не зануляют ни внешнего ни векторного произведения. Тем самым, внешнее и векторное произведение линейно независимой системы векторов имеют по крайней мере по одной ненулевой координате, а следовательно утверждение доказано.

Пространство поливекторов $\Lambda^m(\mathbb{L})$ интересно еще и тем, что для него существуют естественные понижающий и повышающий граничные гомоморфизмы, а именно,

$$\delta : \Lambda^m(\mathbb{L}) \rightarrow \Lambda^{m-1}(\mathbb{L}) : e^{(J)} \rightarrow \sum_{j \in \{J\}} \text{sgn } / (J) \hat{j} / \cdot e^{(j)},$$

где (\hat{J}) означает упорядоченную подстановку изъятия $/ (J) \hat{j} /$, и

$$d : \Lambda^m(\mathbb{L}) \rightarrow \Lambda^{m+1}(\mathbb{L}) : e^{(J)} \rightarrow \sum_{j \in I \setminus \{J\}} \text{sgn } / (J) \check{j} / \cdot e^{(j)},$$

где (\check{J}) означает упорядоченную подстановку присоединения $/ (J) \check{j} /$. Действительно, поскольку в поливекторе $\delta\delta(x)$ базисные элементы образуются с помощью изъятий дважды, то в силу свойства антикоммутативности четностей подстановок с изъятием мы получим тождество $\delta\delta(x) = 0$ для всякого поливектора x . Аналогично получается тождество $dd(x) = 0$.

Обратимся теперь к пространству \mathbb{L} , в котором задан функционал скалярного произведения. Пусть \mathbb{E} будет произвольным n -мерным евклидовым пространством над \mathbb{R} . Если принять, что

$$x^1 \wedge \cdots \wedge x^m \cdot y^1 \wedge \cdots \wedge y^m = \det(x^i \cdot y^j)_J,$$

то это означает, что мы индуцируем из \mathbb{E} в $\Lambda^m(\mathbb{E})$ скалярное произведение поливекторов. Если взять квадрат поливектора $x^1 \wedge \cdots \wedge x^m$, т. е. его скалярное произведение на себя, тогда мы получим определитель Грама системы векторов (x^1, \dots, x^m) , равенство нулю которого эквивалентно линейной зависимости этой системы. Линеаризация определителя Грама, т. е. корень квадратный из его абсолютного значения, представляет собой полилинейную (но не знакопеременную) функцию, которую обычно отождествляют с объемом параллелепипеда, натянутого на систему (x^1, \dots, x^m) . Напомним, что скалярное произведение устанавливает изоморфизм между \mathbb{E} и дуальным к нему пространством \mathbb{E}^* с базисом $(\varepsilon^i)_I$,

двойственным к ортонормированному базису $(e^i)_I$, т. е.

$$* : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^* : x \rightarrow x^* : \langle x^*, y \rangle = x \cdot y \quad (\forall x, y \in \mathbb{E}) :$$

$$\langle e_i^*, e_i \rangle = e_i \cdot e_i : e_i^* = e_i \cdot e_i \varepsilon_i,$$

который индуцирует изоморфизм $\mathbb{T}^m(\mathbb{E}) \simeq \mathbb{T}^m(\mathbb{E}^*)$. В частности, изоморфизм $\Lambda^m(\mathbb{E}) \simeq \Lambda^m(\mathbb{E}^*)$ устанавливается соответствием между m -векторами и m -формами по формуле

$$* : \sum x_J e^J \rightarrow \sum x_J^* \varepsilon^J : \sum_{\{J\}} x_{(J)} e^{(i_1 \wedge \dots \wedge e^{i_m})} \rightarrow \sum_{\{J\}} x_{(J)} e^{(*i_1 \wedge \dots \wedge e^{*i_m})}.$$

Напомним также, что евклидова структура линейного пространства задает оператор дуализации Ходжа

$$\star : \Lambda^m(\mathbb{E}) \rightarrow \Lambda^{n-m}(\mathbb{E}) :$$

$$\sum x_J e^J \rightarrow \langle * \sum x_J e^J, \epsilon \rangle : \sum x_J e^J \rightarrow \text{sgn } /J, J' / \sum x_J^* e^{J'},$$

где дискриминант $\epsilon := e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ при сворачивании с m -формой e^J приобретает знак подстановки $e^J \wedge e^{J'} := e^{(i_1 \wedge \dots \wedge e^{i_m})} \wedge e^{(i_{m+1} \wedge \dots \wedge e^{i_n})}$. Впрочем, в евклидовом пространстве с положительной сигнатурой, где $x_J^* = x_J$, мы получим $\star : \Lambda^m(\mathbb{E}) \rightarrow \Lambda^{n-m}(\mathbb{E}) : \sum x_J e^J \rightarrow \text{sgn } /J, J' / \sum x_J e^{J'}$. Тем самым, наше определение векторного произведения через четность частично упорядоченных подстановок согласовано с определением оператора дуализации в евклидовом пространстве с положительной сигнатурой через сворачивание с дискриминантом.

Обратимся теперь к гладким дифференциальным формам. Пусть дано поле гладких дифференциальных m -форм $a(x) = \sum a_J(x) dx^J$, где $J := (J)$, $dx^J := dx^{(i_1 \wedge \dots \wedge dx^{i_m})}$ и $a_J(x)$ — произвольные гладкие отображения из \mathbb{L} в \mathbb{R} . Напомним, что внешним произведением дифференциальной m -формы $a(x) = \sum a_J(x) dx^J$ и дифференциальной 1-формы $b(x) = \sum_n b_i(x) dx^i$ называют $(m+1)$ -форму $a(x) \wedge b(x) = \sum b_i(x) a_J(x) \text{sgn } \check{J} dx^{\check{J}}$, где \check{J} есть упорядоченная подстановка присоединения $/ (J) i /$, т.е. внешнее произведение получается в результате внешнего произведения этих форм и подстановок присоединения, преобразующих базисные элементы $dx^J \wedge dx^i$ к упорядоченному виду $dx^{\check{J}}$.

Вместе с тем, помимо внешнего произведения, существует внутреннее произведение дифференциальной m -формы $a(x) = \sum a_J(x) dx^J$ на векторное поле $\bar{b}(x) = \sum_n b_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, под которым понимают свертку поля формы с полем вектора. Однако, несмотря на простоту такого определения внутреннего произведения, обратим ваше внимание на то, что

для сворачивания необходимо, выполнив подстановки изъятия, привести форму $a(x) = \sum a_J(x) dx^J$ к виду $\sum a_J(x) \operatorname{sgn} \hat{J} dx^{\hat{J}} \wedge dx^i$, а затем, заменив в этом представлении внешнее произведение на dx^i на произведение на число $b_i(x)$, получить уже искомое внутреннее произведение $\langle a(x), \bar{b}(x) \rangle = \sum b_i(x) a_J(x) \operatorname{sgn} \hat{J} dx^{\hat{J}}$.

Внешняя производная гладкой дифференциальной формы (дифференциал) задается формулой $da(x) = \sum d_J a(x) dx^{\hat{J}} = \sum da_J(x) \wedge dx^J$, где $da_J(x) = \sum_n \frac{\partial a_J(x)}{\partial x_i} dx^i$. Тогда, в силу свойства антикоммутативности подстановок упорядочивания с присоединением, которые возникают при повторном дифференцировании, мы получим тождество $dda(x) = 0$, характеризующее внешнюю производную как повышающий граничный гомоморфизм.

Установим теперь еще одно важное свойство внешней производной. Пусть дан такой произвольный предельно малый вектор $\Delta x = \sum_n \Delta x^i = \sum_n \Delta x_i e^i$, что из него можно сформировать ненулевой $(m+1)$ -вектор $\Delta = \sum \Delta x^{\hat{J}}$, где $\Delta x^{\hat{J}} := \Delta x^{(i_1 \wedge \dots \wedge \Delta x^{i_{m+1}})}$, и соответствующий ему m -вектор $\delta \Delta = \sum \Delta x^{\hat{J}}$, где $\Delta x^{\hat{J}} = \Delta x^{(i_1 \wedge \dots \wedge \Delta x^{i_m})}$. Тогда $\langle da(x), \Delta \rangle = \sum \langle d_J a(x) dx^{\hat{J}}, \Delta x^{\hat{J}} \rangle$, где $\langle d_J a(x) dx^{\hat{J}}, \Delta x^{\hat{J}} \rangle = d_J a(x) \cdot \Delta x_{i_1} \cdots \Delta x_{i_{m+1}}$. С другой стороны, разложив в этом выражении компоненту дифференциала и компоненту поливектора, мы будем иметь выражение $\langle d_J a(x) dx^{\hat{J}}, \Delta x^{\hat{J}} \rangle = \langle \sum_n \frac{\partial a_J(x)}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^{\hat{J}}, \sum_n \Delta x^i \wedge \Delta x^{\hat{J}} \rangle$, и если затем свернем 1-форму и вектор, то получим равенство $\langle d_J a(x) dx^{\hat{J}}, \Delta x^{\hat{J}} \rangle = \langle \sum_{m+1} [a_J(x + \Delta x^i) - a_J(x)] dx^J, \sum_{m+1} \Delta x^J \rangle$. Таким образом, доказано утверждение

2.2 Предложение. $\langle da(x), \Delta \rangle = \langle [a(x + \Delta x) - a(x)], \delta \Delta \rangle$

Данное предложение мы применим в следующем разделе при выводе формулы Стокса, где предельно малые вектора служат остовом для предельно малого параллелепипеда а интегрирование по поверхности отождествляется с суммированием сверток дифференциальной формы и поливекторов, соответствующих этим параллелепипедам. Сейчас же, заметим только, что величина $\langle da(x), \Delta \rangle$ характеризует линейную часть приращения свертки дифференциальной формы в точке x и поливектора, соответствующего граням параллелепипедов, построенных на предельно малых векторах, при сдвиге каждой грани на противоположную и соответствующем изменении значения дифференциальной формы.

3 Параллелепипеды

Начнем мы с классического определения параллелепипедов, которое здесь повторим, сославшись на университетский учебник [3].

3.1 Определение. Параллелепипедом π^m , натянутым на систему линейно независимых векторов x^1, \dots, x^m , выходящих из точки x^0 n -мерного аффинного пространства \mathbb{R}^n , называется множество точек $x^0 + \sum_m \alpha_i x^i$, задаваемое условием $0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \forall i \in J$.

Затем, в дополнение к этому геометрическому понятию, мы дадим алгебраическое понятие ориентированного параллелепипеда.

3.2 Определение. Ориентированным параллелепипедом называется параллелепипед, в котором определенным образом задано направление всех цепочек ребер $x^{/i_1}, \dots, x^{i_m/}$. Направление цепочки от x^0 к $x^0 + \sum_m x^i$ считается положительным, а обратное — отрицательным. Если в параллелепипеде всем четным цепочкам (цепочкам с четными последовательностями ребер) задать положительное направление, а нечетным — отрицательное, то такой параллелепипед называется положительно ориентированным и обозначается $+\pi^m$, т. е. $\text{sgn } \pi^m = +1$. В обратном случае параллелепипед называется отрицательно ориентированным и обозначается $-\pi^m$, т. е. $\text{sgn } \pi^m = -1$.

На основании геометрического определения мы полагаем, что гранями параллелепипеда π^m служат $2m$ параллелепипедов π^{m-1} , а именно, m параллелепипедов π_{*j}^{m-1} , натянутых на подсистемы $m-1$ векторов, полученных исключением вектора x^j , где $j \in J$, из системы x^1, \dots, x^m , и выходящих из начальной точки x^0 , а также m параллелепипедов π_{j*}^{m-1} , выходящих из m точек $x^0 + x^i$ и натянутых соответственно на подсистемы без x^j каждый. Таким образом, у параллелепипеда 2^m вершин, $2m$ граней, и $m2^{m-1}$ ребер. Заметим также, что все грани граней параллелепипеда π^m соединяют соответствующие пары соседних граней, т. е. $\pi_{j*}^{m-1} \cap \pi_{k*}^{m-1} = \pi_{jk*}^{m-2}$, $\pi_{*j}^{m-1} \cap \pi_{*k}^{m-1} = \pi_{*jk}^{m-2}$, $\pi_{j*}^{m-1} \cap \pi_{*k}^{m-1} = \pi_{j*k}^{m-2}$, где $j \neq k$.

3.3 Определение. Ориентированной поверхностью параллелепипеда называется совокупность определенным образом ориентированных его граней. Ориентация граней π_{*j}^{m-1} параллелепипеда соответствует четности подстановок $/(1, \dots, m)\hat{j}/$ а грани π_{j*}^{m-1} , противоположные граням π_{*j}^{m-1} , имеют также и противоположную ориентацию. Иначе говоря, $\text{sgn } \pi_{*j}^{m-1} = -\text{sgn } \pi_{j*}^{m-1} = \text{sgn } /(1, \dots, m)\hat{j}/$.

Тогда, в силу антикоммутативности подстановок с изъятием, мы получим одно замечательное свойство

3.1 Предложение. *Общие грани соседних граней ориентированной поверхности параллелепипеда имеют в них противоположную ориентацию.*

Действительно, в параллелепипеде π_{*j}^{m-1} ориентация грани π_{*jk}^{m-2} равна $\text{sgn} / (1, \dots, m) \hat{j} \hat{k} /$ а в параллелепипеде π_{*k}^{m-1} ориентация этой же грани равна $\text{sgn} / (1, \dots, m) \hat{k} \hat{j} /$. Аналогично, в параллелепипеде π_{j*}^{m-1} ориентация грани π_{jk*}^{m-2} равна $\text{sgn} / (1, \dots, m) \hat{j} \hat{k} /$ а в параллелепипеде π_{k*}^{m-1} ее ориентация равна $\text{sgn} / (1, \dots, m) \hat{k} \hat{j} /$. Вместе с тем, в параллелепипеде π_{j*}^{m-1} ориентация грани π_{j*k}^{m-2} равна $-\text{sgn} / (1, \dots, m) \hat{j} \hat{k} /$ а в параллелепипеде π_{*k}^{m-1} ее ориентация равна $-\text{sgn} / (1, \dots, m) \hat{k} \hat{j} /$.

Алгебраическая конструкция ориентированного параллелепипеда допускает формализацию. Действительно, если допустить кратность ориентированного параллелепипеда, реализуемую посредством расслоения цепочек его ребер, то алгебраическую сумму чисел положительно и отрицательно ориентированных слоев можно задавать некоторым произвольным целым числом. Тем самым, мы можем говорить о z -ориентированном параллелепипеде $z\pi^m$, который является элементом абелевой группы Π_m , изоморфной \mathbb{Z} .

В свою очередь, геометрическая конструкция параллелепипеда через возможность формирования гомологической сети параллелепипедов допускает расширение до понятия клеточной поверхности. Действительно, параллелепипед π^m в пространстве \mathbb{R}^n может быть продолжен геометрически, через собственные $(m-1)$ -мерные грани так, что новый m -мерный параллелепипед натягивается на произвольную, но уже существующую грань, и некоторый новый вектор, не лежащий в подпространстве этой грани. Если допустить, что параллелепипеды гомеоморфно отображаются в клетки, которые сами себя не пересекают, тогда конечное или счетное объединение клеток-параллелепипедов π^m , произвольные пары которых либо вовсе не пересекаются, либо пересекаются своими общими гранями произвольной размерности, можно отождествить с m -мерным клеточным комплексом. Односвязной m -мерной клеточной поверхностью Ω^m мы назовем такой m -мерный клеточный комплекс, в котором каждая пара клеток-параллелепипедов может быть соединена в цепь, связанную общими $(m-1)$ -мерными гранями ее звеньев – соседних клеток-параллелепипедов. Если все клетки-параллелепипеды односвязной клеточной поверхности пересекаются только своими общими гранями произвольной размерности и каждая общая грань размерности

$(m - 1)$ является пересечением не более 2 клеток-параллелепипедов, то мы говорим об односвязной клеточной поверхности без самопересечений или о клеточном многообразии. Границей $d\Omega^m$ клеточной поверхности Ω^m мы назовем объединение всех $(m - 1)$ -мерных граней клеток-параллелепипедов поверхности Ω^m за вычетом ее общих граней. Поскольку все грани граней параллелепипеда являются общими гранями, то и все грани $(m-1)$ -мерных параллелепипедов границы являются общими гранями, а следовательно граница является объединением односвязных $(m-1)$ -поверхностей без границ.

Топологически инвариантным (гомеоморфным) преобразованием клеточной поверхности с границей мы назовем такое присоединение к ее границе новой клетки-параллелепипеда или изъятие уже существующей клетки-параллелепипеда, которое не нарушает связности примыкающей к этой клетке границы, т.е. не изменяет числа односвязных кусков ее границы.

Множество всех m -мерных клеток-параллелепипедов, составляющих поверхность Ω^m , порождает свободную абелеву группу $\Pi_m(\Omega^m)$, образованную формальными суммами $\sum_K z_i \pi_i^m$, где $z_i \in \mathbb{Z}$, $K \subseteq \mathbb{N}$. Сумму, составленную из ± 1 -ориентированных клеток-параллелепипедов поверхности Ω^m , грани пересечения соседних клеток-параллелепипедов которой имеют в них противоположную ориентацию, мы назовем ориентированной клеточной поверхностью. Поверхность Ω^m , которая допускает ориентированную поверхность, называется ориентируемой поверхностью. Заметим при этом, что при любом гомеоморфном присоединении или изъятии клетки-параллелепипеда грань соединения примыкающих клеток всегда имеет в них противоположную ориентацию. Действительно, если совместить примыкающие клетки сохраняющим ориентацию сдвигом, то грань примыкания отобразится в две противоположные грани, имеющие противоположную ориентацию. Следовательно ориентация гомеоморфно присоединяемой (изымаемой) клетки согласована с ориентацией соседних клеток, и поэтому мы получим

3.2 Предложение. *Ориентируемость является топологическим инвариантом поверхности параллелепипедов Ω^m*

Кроме того, всякая клеточная поверхность Ω^m порождает свободную абелеву группу $\Pi_{m-1}(\Omega^m)$, образованную формальными суммами граней ее клеток-параллелепипедов. Группу $\Pi_{m-1}(\Omega^m)$ мы называем группой граней поверхности. Группа граней одной клетки-параллелепипеда $\Pi_{m-1}(\pi^m)$ состоит из формальных сумм $\sum_{2m} z_i \pi_i^{m-1}$ а отображение

$$\gamma : \pi^m \rightarrow \Pi_{m-1}(\pi^m) :$$

$$\pi^m \rightarrow \sum_m \operatorname{sgn} / (1, \dots, m) \hat{j} / \cdot \pi_{*j}^{m-1} - \sum_m \operatorname{sgn} / (1, \dots, m) \hat{j} / \cdot \pi_{j*}^{m-1}$$

индуцирует граничный гомоморфизм соответствующих абелевых групп

$$\delta : \Pi_m(\Omega^m) \rightarrow \Pi_{m-1}(\Omega^m) : \sum_K z_i \pi_i^m \rightarrow \sum_K z_i \gamma(\pi_i^m).$$

Действительно, в силу предложения 3.1 имеет место тождество $\gamma\gamma(\pi^m) = 0$, применяя которое покомпонентно, получим другое тождество $\delta\delta(\Omega^m) = 0$, определяющее граничное отображение и цепной комплекс $\{\Pi_{m-1}(\Omega^m), \delta\}$.

Положим

$$Z_{m-1}(\Omega^m) := \operatorname{Ker}\{\delta : \Pi_{m-1}(\Omega^m) \rightarrow \Pi_{m-2}(\Omega^m)\} \subset \Pi_{m-1}(\Omega^m)$$

и назовем $Z_{m-1}(\Omega^m)$ группой циклов. Положим также

$$B_{m-1}(\Omega^m) := \operatorname{Im}\{\delta : \Pi_m(\Omega^m) \rightarrow \Pi_{m-1}(\Omega^m)\} \subset \Pi_{m-1}(\Omega^m)$$

и назовем $B_{m-1}(\Omega^m)$ группой границ. Так как $\delta\delta = 0$, то $B_{m-1}(\Omega^m) \subset Z_{m-1}(\Omega^m)$. Факторгруппу

$$H_{m-1}(\Omega^m) := Z_{m-1}(\Omega^m) / B_{m-1}(\Omega^m)$$

назовем $(m-1)$ -мерной группой гомологий. Тогда, поскольку гомеоморфное присоединение или изъятие клетки-параллелепипеда добавляет в группу граней или удаляет из нее элементарный цикл, который является границей, то мы имеем

3.3 Предложение. *Группа $(m-1)$ -мерных гомологий является топологическим инвариантом клеточной поверхности Ω^m*

Таким образом, применение понятия ориентированного параллелепипеда позволяет сделать естественный переход к построению стандартной теории гомологий. Однако уже в следующем разделе мы покажем, что концепция применения параллелепипедов с успехом может работать и в нестандартной топологической теории.

Обратимся теперь к вопросам измерения, связанным с поверхностями. Поскольку внешнее произведение векторов, на которые натягивается параллелепипед, задает отображение $\bar{\pi}^m : \pi^m \rightarrow \wedge^m(\mathbb{L})$, индуцирующее эквивалентность элементов пространства $\{\pi^m\}$, то пространство $\wedge^m(\mathbb{L})$ и $\wedge^m(\mathbb{L}^*)$ можно интерпретировать как пространство эквивалентных приборов и воздействий на них соответственно. Иначе говоря, мы

полагаем, что свертка $\langle \bar{x}, \tilde{y} \rangle$, где $\bar{x} \in \wedge^m(\mathbb{L})$, $\tilde{y} \in \wedge^m(\mathbb{L}^*)$, есть результат измерения воздействия \tilde{y} на прибор \bar{x} . В соответствии с такой концепцией, всякой поверхности Ω^m и полю дифференциальных m -форм $a(x)$ можно сопоставить сумму свертков $\sum_K \langle a(x_i^0), \bar{\pi}_i^m \rangle$, которую следует понимать как результат воздействия на поверхность, составленную из K приборов-параллелепипедов. В том случае, когда поверхность Ω^m составлена из предельно малых параллелепипедов $\Delta\pi^m$, мы назовем ее интегральной поверхностью а сумму свертков обозначим символом интеграла $\int_{\Omega^m} \langle a(x), \Delta\bar{\pi}^m \rangle$. Заметим при этом, что для канонической поверхности, все параллелепипеды которой построены на векторах, коллинеарных базисным, принято обозначение $\int_{\Omega^m} a(x) dx^J$. Поскольку общие грани являются одновременно начальными и конечными порождающими гранями в соседних параллелепипедах, то применив разложение

$$\langle da(x), \Delta\bar{\pi}^m \rangle = \sum_m \langle a(x + \Delta x^j), \Delta\bar{\pi}_{j*}^{m-1} \rangle - \sum_m \langle a(x), \Delta\bar{\pi}_{*j}^{m-1} \rangle$$

ко всем предельно малым параллелепипедам интегральной поверхности, мы получим формулу Стокса

$$\int_{\Omega^m} \langle da(x), \Delta\bar{\pi}^m \rangle = \int_{\delta\Omega^m} \langle a(x), \Delta\bar{\pi}^{m-1} \rangle.$$

Если отображение $\bar{\pi}^m$ индуцировано векторным произведением, то с ориентированной поверхностью Ω^m можно связать векторный объем $\text{Vol}(\Omega^m) := \sum_K \bar{\pi}_i^m$. Наконец, со всякой интегральной поверхностью, заданной в евклидовом пространстве положительной сигнатуры, можно связать линейный объем $\int_{\Omega^m} \sqrt{|\Delta\bar{\pi}^m \cdot \Delta\bar{\pi}^m|}$, который в наблюдаемом пространстве ассоциируется с длиной, площадью и собственно объемом.

4 Ориентируемые многообразия

Прежде всего дадим ряд определений. Пусть неориентированный граф без петель так вложен в пространство \mathbb{R}^{n+1} , что в каждой из вершин собран пучок из n криволинейных ребер, при этом все ребра разбиты на n классов а в каждой вершине встречается по одному представителю каждого класса, причем все касательные вектора к ребрам в каждой вершине линейно независимы. Назовем такой граф (вместе с его укладкой в \mathbb{R}^{n+1}) каркасом и натянем на него поверхность с границей, т.е. образуем клеточную n -поверхность с каркасом в качестве одномерного остова n -мерного клеточного комплекса. Определим же мы наш n -мерный клеточный комплекс по индукции: 1-мерный клеточный комплекс задан

своим каркасом, 2-мерный клеточный комплекс задается гомеоморфными параллелограмму 2-мерными клетками с границами, состоящими из всевозможных ребер двух разных классов, n -мерный комплекс задается гомеоморфной n -мерному параллелепипеду клеткой с границей, состоящей из $(n - 1)$ -мерного комплекса. Натянутую на каркас поверхность будем также называть поверхностью каркаса. Тогда имеет место

4.1 Лемма. *Поверхность каркаса гомеоморфна n -мерному симплексу.*

Доказательство. С одной стороны, поскольку граф у нас связный, то соответствующий ему каркас можно гомеоморфно стянуть в точку. С другой стороны, любая вершина поверхности каркаса одновременно является вершиной предельно малого элемента этой поверхности; т.е., гомеоморфно точке n -мерного симплекса. Следовательно, стягивая каркас к некоторой вершине, можно совместить его с этим предельно малым симплексом. \square

Вложим теперь в пространство \mathbb{R}^{n+1} связку окружностей, целиком лежащую в n не параллельных друг другу плоскостях, причем все узлы связки лежат на одной прямой а каждая окружность связки пересекается в двух своих противоположных точках, которые являются узлами пучков из n окружностей, лежащих в n плоскостях. Назовем такую связку окружностей s -каркасом и выделим в нем определенное семейство обычных каркасов с вершинами в узлах s -каркаса и с ребрами, состоящими из полуокружностей s -каркаса. Для этого мы каждый класс окружностей s -каркаса, принадлежащих одной плоскости, разделим посредством прямой, проходящей через его узлы, на два класса полуокружностей. Тогда, выбирая из полуокружностей s -каркаса ребра в соответствии с определенным выбором классов полуокружностей, мы получим семейство из 2^n различных каркасов, которые будем называть s -каркасами. В свою очередь, суммарную поверхность всех s -каркасов мы назовем поверхностью s -каркаса. Тогда имеет место

4.2 Лемма. *Поверхность s -каркаса является n -мерным клеточным замкнутым ориентируемым многообразием.*

Доказательство. Утверждение о том, что поверхность s -каркаса есть замкнутое многообразие следует из того, что всякая часть границы поверхности произвольного s -каркаса является одновременно частью границы поверхности другого s -каркаса. Действительно, для поверхностей двух s -каркасов, отличающихся только одним классом полуокружностей, часть границы, полученная исключением этого класса полуокружностей, является их общей границей. Тем самым, поверхность s -каркаса

склеена из поверхностей s -каркасов (гомеоморфных шару) по их границам, но сама не имеет границы. Ориентируемость нашего многообразия следует из того, что общая часть границы поверхностей двух s -каркасов имеет в них противоположную ориентацию, которая задается противоположным классом полуокружностей, отличающим поверхности двух граничащих друг с другом s -каркасов. \square

Рассмотрим теперь вопрос о классификации s -каркасов. Если мы обратимся к нашему определению s -каркасов, то увидим, что классификация s -каркасов эквивалентна классификации неориентированных графов без петель, у которых все ребра разбиты на n классов а каждой вершине инцидентны n смежных ребер, принадлежащих различным классам. Действительно, достаточно установить соответствие между ребрами одного класса и окружностями, лежащими в одной плоскости, а также между вершинами графа и узлами s -каркаса. Далее мы сформируем элементарный s -каркас, соответствующий простейшему графу. Для этого, произвольным образом разложим n в сумму $n_1 + \dots + n_m = n$, где $1 \leq m \leq n$, и построим 2^m -вершинный граф, изоморфный m -параллелепипеду с ребрами кратности n_i , т. е. такой граф, вершины которого совпадают с вершинами m -параллелепипеда а всякие n_i его кратных ребер соответствуют каждому ребру параллелепипеда из соответствующего класса его параллельных ребер. Тогда, поскольку у m -параллелепипеда $m2^{m-1}$ ребер, то с учетом их кратности мы получим $n2^{m-1}$ ребер графа или $n2^{m-1}$ окружностей соответствующего s -каркаса. Элементарный s -каркас, соответствующий разложению n_1, \dots, n_m мы обозначим символом $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$ и заметим, что из двух произвольных элементарных s -каркасов можно составить новый s -каркас $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m} + S^{n_1} \times \dots \times S^{n_l}$, которому соответствует граф, полученный из двух простейших графов путем разрыва ребер в одной произвольной вершине каждого из них и последующего совмещения соответствующих ребер двух этих графов. Однако, если $l = 1$, то мы получим исключение, так как в этом случае $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m} + S^n = S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$. Таким образом, мы получили полную классификацию s -каркасов, которая полностью определяется свободной абелевой группой с элементарными s -каркасами (кроме S^n) в качестве образующих и каркасом S^n в качестве нулевого элемента.

Сейчас мы приступим к доказательству обратного 4.2 утверждения.

4.3 Теорема. *Всякое n -мерное замкнутое ориентируемое многообразие, вложенное в \mathbb{R}^{n+1} , гомеоморфно поверхности некоторого s -каркаса*

Доказательство. В двумерном случае это действительно так, поскольку

ку классификация c -каркасов совпадает с классификацией двумерных ориентируемых замкнутых многообразий. В общем случае, ввиду отсутствия полной классификации многообразий, нам следует установить, что любое замкнутое ориентируемое многообразие, вложенное в \mathbb{R}^{n+1} , обладает каркасом, гомеоморфным некоторому c -каркасу. Пусть дано многообразие M^n и его клеточное покрытие, образующее клеточную поверхность. Возьмем произвольную точку x многообразия M^n , которая совпадает с вершиной произвольной клетки покрытия, и заметим, что она является общей вершиной для 2^n клеток-параллелепипедов, лежащих в ее окрестности, а любое ребро, инцидентное этой вершине, является общим ребром для 2^{n-1} клеток-параллелепипедов. Затем, используя 2^n цветов краски, раскрасим покрытие многообразия M^n так, чтобы краски не перемешивались а первые мазки краски покрыли бы каждую клетку окрестности точки x своим цветом. Иначе говоря, требуется, используя 2^n клеток в качестве начальных для 2^n клеточных поверхностей, гомеоморфным присоединением новых клеток разбить все покрытие многообразия M^n на 2^n клеточных поверхностей. Раскрасив таким образом покрытие многообразия M^n , мы получим некий каркас. Действительно, точки многообразия, в которых пересекаются поверхности всех цветов, будут служить вершинами, а линии многообразия, в которых пересекаются 2^{n-1} поверхностей различного цвета, будут служить ребрами нашего каркаса. Но поскольку исходное многообразие было ориентируемым, то полученный каркас допускает согласованную ориентацию ребер в каждой вершине. Следовательно всякую пару противоположных ребер этого каркаса, выходящие из одной вершины, можно сопоставить окружности некоторого c -каркаса. Тем самым, проблема полной классификации замкнутых ориентируемых n -многообразий, вложенных в \mathbb{R}^{n+1} , находит решение, соответствующее классификации c -каркасов. \square

В заключение заметим, что многообразие, имеющее c -каркас типа S^n , гомеоморфно сфере S^n , а многообразие, имеющее c -каркас, представленный суммой двух элементарных c -каркасов, образуется из элементарных многообразий с помощью вырезания в каждом из них по клетке и склеивания их по границе клетки. С учетом этих замечаний справедливо утверждение.

4.1 Предложение. *Фундаментальная группа замкнутого ориентируемого многообразия тривиальна, если во всех его образующих элементарных каркасах типа $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_m}$ не встречается ни одной компоненты S^1 .*

Доказательство. Действительно, при данных условиях исходное мно-

гообразии можно склеить из элементарных многообразий, каждое из которых можно разложить в произведение подмногообразий, гомеоморфных некоторым сферам S^k , где каждое $k > 1$. Но поскольку фундаментальная группа произведения таких сфер тривиальна а каждая граница склейки гомеоморфна сфере S^{n-1} , которая в случае $n > 2$ имеет тривиальную фундаментальную группу, то утверждение доказано. \square

Из последнего предложения и из того, что классификация замкнутых ориентируемых многообразий в размерности три сводится к классификации соответствующих каркасов, которые могут быть составлены из каркасов типа $S^1 \times S^1 \times S^1$ и $S^1 \times S^2$, где обязательно встречается компонента S^1 , либо это есть каркас типа S^3 , следует, что замкнутые ориентируемые 3-многообразия, имеющие тривиальную фундаментальную группу, гомеоморфны 3-мерной сфере. Таким образом, классическая гипотеза Пуанкаре, сформулированная в классе вложенных многообразий, является простым следствием классификации замкнутых ориентируемых многообразий посредством классификации их каркасов.

А Минимальные потоки и поверхности

Векторные поля и минимальные поверхности, заданные в евклидовом пространстве, основательно описаны в учебной литературе [4] [5], [6], [7], поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь того, что непосредственно вытекает из нашей алгебры параллелепипедов, либо посмотрим на известные факты немного с другой стороны.

Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n задано произвольное гладкое ковекторное поле, т. е. поле дифференциальной 1-формы $a(x) = \sum_n a_j(x) dx^j$. Тогда мы имеем также сопряженное к $a(x)$ векторное поле $a^*(x)$ и дуальную к $a(x)$ дифференциальную (n-1)-форму $\star a(x) = \text{sgn } J \sum_n a_j(x) dx^J$, где $J := /I, \hat{j}/$. Дифференциальные формы $a(x)$ и $\star a(x)$ можно представить стационарным потоком некой идеальной жидкости, измеряемым 1-мерными и (n-1)-мерными приборами (поливекторами) в результате их сворачивания с $a(x)$ и $\star a(x)$ соответственно. Если в качестве приборов для измерения потока используются 1-мерные или (n-1)-мерные интегральные поверхности, то в результате измерения мы получим интегральные суммы $\int_{\Omega^1} \langle a(x), dx \rangle$ и $\int_{\Omega^{n-1}} \langle \star a(x), dx^{n-1} \rangle$ соответственно, где $dx := \Delta \bar{\pi}^1$ и $dx^{n-1} := \Delta \bar{\pi}^{n-1}$. Применение предельно малых поверхностей без границ дает нам возможность установить локальные характеристики потока. Действительно, отсутствие локального вращения потока $\oint \langle a(x), dx^1 \rangle = 0$ обеспечено дифференциальным условием

$da(x) = 0$, а отсутствие стоков и истоков $\oint \langle \star a(x), dx^{n-1} \rangle = 0$ обеспечено условием $d \star a(x) = 0$.

Критерии замкнутости потока мы дополним критериями его устойчивости. Так, ламинарное течение потока, характеризуемое его слоением, удовлетворяет дифференциальному условию голономности $a(x) \wedge da(x) = 0$. Заметим при этом, что всякая точная 1-форма $a(x) = d\varphi(x)$ голономна а ее семейство интегральных поверхностей (слоение) задано поверхностями уровня функции $\varphi(x)$. В свою очередь, всякое голономное ковекторное поле $a(x)$ коллинеарно некоторому потенциальному ковекторному полю $d\varphi(x)$, т.е. $a(x) = k(x)d\varphi(x)$, где $k(x)$ — произвольная необращающаяся в нуль гладкая функция. Действительно, $da(x) = d[k(x)d\varphi(x)] = dk(x) \wedge d\varphi(x)$, и поэтому $a(x) \wedge da(x) = k(x)d\varphi(x) \wedge dk(x) \wedge d\varphi(x) = 0$. Обратное, если уравнение $a(x) = 0$ вполне интегрируемо, то его интегральными поверхностями, т.е. слоению, всегда можно поставить в соответствие поверхности уровня некоторой функции $\varphi(x)$, а следовательно $a(x)$ коллинеарно $d\varphi(x)$.

Равновесное течение ламинарного потока удовлетворяет соответствующему дифференциальному условию, в частности, для потенциального поля $a(x) = d\varphi(x)$ это будет дифференциальное уравнение $\Delta\varphi(x) = 0$. Действительно, величина $\Delta\varphi(x) = d \star d\varphi(x)$ характеризует разность давлений потока на предельно малые элементы поверхностей уровня, полученные градиентным переносом в предельно малом элементе объема, а именно,

$$\int_{\Delta V} \langle d \star d\varphi(x), dx^n \rangle = \int_{\Delta\Phi_2} \langle \star d\varphi(x), dx^{n-1} \rangle - \int_{\Delta\Phi_1} \langle \star d\varphi(x), dx^{n-1} \rangle,$$

где учтено отсутствие давления на боковую поверхность предельно малого элемента объема ΔV , образованного заметанием предельно малой площадки $\Delta\Phi_1$ поверхности уровня $\varphi(x) = c$ на площадку $\Delta\Phi_2$ поверхности уровня $\varphi(x) = c + h$ при ее переносе градиентным векторным полем. Следовательно гармоничность функции уровня обеспечивает отсутствие разности давлений, т.е. равновесие (устойчивость) соответствующего потока. В общем случае, когда $a(x) = k(x)d\varphi(x)$, аналогичные рассуждения позволяют в качестве критерия равновесности потока получить дифференциальное уравнение $d \star k(x)d\varphi(x) = k(x)\Delta\varphi(x) + (\nabla k(x), \nabla\varphi(x)) = 0$.

Рассмотрим теперь вариационную задачу, решение которой позволит нам получить локально устойчивые (минимальные) потоки. В качестве функционала устойчивости потока мы возьмем значение криволинейного интеграла $\int \langle a(x), dx \rangle$, определенного на конечном отрезке прямой общего положения. Поскольку нас интересует локальный критерий устойчивости потока, то следует взять предельно малый отрезок Δx и решить

вариационное уравнение

$$\text{Loc. var} \int \langle a(x), dx \rangle = \delta \int_x^{x+\Delta x} \langle a(x), dx \rangle = \delta \langle a(x + \Delta x) - a(x), \Delta x \rangle = 0.$$

Тем самым, интегральная вариационная задача сводится к вариационной задаче на минимум приращения свертки. Пусть сначала вектор Δx коллинеарен вектору $a^*(x)$. Тогда уравнение $\delta \langle a(x + \Delta x) - a(x), \Delta x \rangle = \pm(|a(x + \Delta x)| - |a(x)|)|\Delta x| = 0$ выполняется, если $|a(x + \Delta x)| = |a(x)|$, откуда следует, что необходимым условием выполнения вариационного уравнения является постоянство модуля ковекторного поля $a(x)$. Затем пусть вектор Δx ортогонален вектору $a^*(x)$. Тогда уравнение $\delta \langle a(x + \Delta x) - a(x), \Delta x \rangle = \delta \langle a(x + \Delta x), \Delta x \rangle = 0$ выполняется, если ковектор $a(x + \Delta x)$ параллелен ковектору $a(x)$, откуда следует, что необходимым условием выполнения вариационного уравнения является голономность поля $a(x)$. Теперь пусть вектор Δx имеет общее положение а ковекторное поле $a(x)$ единично и голомно, т.е. $a(x) = k(x)d\varphi(x)$, где $k(x) = |\nabla\varphi(x)|^{-1}$. Тогда, поскольку $a(x + \Delta x) = a(x) + \sum_n \langle \nabla a_j(x), \Delta x \rangle dx^j = a(x) + \nabla_{\Delta x} a(x)$, то приращение свертки равно значению квадратичной формы $\langle a(x + \Delta x) - a(x), \Delta x \rangle = \langle \nabla_{\Delta x} a(x), \Delta x \rangle = (H\Delta x, \Delta x)$, где оператор H в матричном представлении задается недиагональными элементами $k(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \left(\frac{\partial k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \right)$ и диагональными элементами $k(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} + \left(\frac{\partial k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \right)$. Таким образом, вариационное уравнение $\delta(H\Delta x, \Delta x) = 0$ сводит нашу задачу к поиску минимального самосопряженного оператора. В этой связи напомним [9], что всякий самосопряженный оператор C с точностью до отражений может быть разложен на оператор A с нулевым следом и положительно определенный оператор B , т. е. $C = \pm(A + B)$. Действительно, достаточно привести матрицу оператора C к диагональному виду и разложить ее диагональные элементы. В то же время, для квадратичных форм выполняется неравенство $(Ax, x) < ((A + B)x, x)$, следовательно самосопряженный оператор с нулевым следом будет минимальным оператором и решение $\text{tr} H = k(x)\Delta\varphi(x) + (\nabla k(x), \nabla\varphi(x)) = 0$, где $k(x) = |\nabla\varphi(x)|^{-1}$, является необходимым и достаточным условием локальной экстремальности функционала устойчивости потока. Заметим также, что такое же решение имеет вариационная задача на экстремум интеграла $\int \langle \star a(x), dx^{n-1} \rangle$, определенного на конечной площадке произвольной $(n-1)$ -плоскости общего положения. Действительно, вариационное уравнение

$$\text{Loc. var} \int \langle \star a(x), dx^{n-1} \rangle = \delta \langle \star a(x + \Delta x) - \star a(x), \star \Delta x \rangle = 0$$

не меняет постановки вариационной задачи, так как свертка вектора с ковектором равна свертке их дуализаций.

Пусть теперь в евклидовом пространстве положительной сигнатуры, где мы не делаем отличия векторов от ковекторов, дано поле точной 1-формы $d\varphi(x)$. Рассмотрим производное от него единичное голономное поле $n(x) = k(x)d\varphi(x)$, где $k(x) = 1/|d\varphi(x)|$, и вычислим площадь S поверхности Φ^{n-1} , которая является ограниченной частью поверхности уровня функции $\varphi(x)$. Покажем, что

$$S(\Phi^{n-1}) = \int_{\Phi^{n-1}} (\star n(x), dx^{n-1}).$$

Действительно, единичный вектор $n(x)$ ортогонален к плоскости, касательной к поверхности уровня функции $\varphi(x)$ в точке x а единичный поливектор $\star n(x)$ коллинеарен предельно малому поливектору $\Delta\bar{\pi}^{n-1}(x)$, и поэтому площадь последнего равна их скалярному произведению $(\star n(x), \Delta\bar{\pi}^{n-1}(x))$, откуда следует, что

$$S(\Phi^{n-1}) = \sum_{\Phi^{n-1}} S(\Delta\pi^{n-1}) = \int_{\Phi^{n-1}} (\star n(x), dx^{n-1}).$$

Заметим также, что

$$\int_{\Delta V} \langle d\star n(x), dx^n \rangle = S(\Delta\Phi_2) - S(\Delta\Phi_1),$$

где площадку $\Delta\Phi_2$ образована ортогональным переносом площадки $\Delta\Phi_1$ на предельно малое расстояние с поверхности уровня Φ_1 на поверхность уровня Φ_2 , а следовательно

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{S(\Delta\Phi_2) - S(\Delta\Phi_1)}{\Delta V} = d\star n(x).$$

Вместе с тем, легко показать, что локальное решение вариационного уравнения

$$\text{Loc. var} \int_{\Phi^{n-1}} (\star n(x), dx^{n-1}) = 0$$

приводит к тому же дифференциальному уравнению минимальности $d\star n(x) = 0$. Таким образом, локально минимальные параметризованные поверхности евклидова пространства с нулевой средней кривизной и поверхности уровня функций, удовлетворяющих уравнению минимальности, эквивалентны. Впрочем, эта эквивалентность следует также из того хорошо известного факта, что средняя кривизна поверхности уровня,

заданной в n -мерном евклидовом пространстве, вычисляется по формуле $H(x) = -(\frac{1}{n})d \star (\frac{d\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|})$. Кроме того, в результате исследования мы получили дуальность таких понятий как минимальные поверхности и минимальные (максимально устойчивые) потоки.

Список литературы

- [1] Тышкевич З. И., Феденко А. С., Линейная алгебра и аналитическая геометрия, "Вышэйш. школа", Минск, 1976
- [2] С. Ленг, Алгебра, "Мир", Москва, 1968
- [3] Винберг Э. Б., Курс алгебры, "Факториал", Москва, 1999
- [4] Ю.А. Аминов, Геометрия векторного поля, "Наука", Москва, 1990.
- [5] Горбузов В. Н., Математический анализ: Теория поля: Учебное пособие, Гродно: ГрГУ, 2000
- [6] В. Блашке, Введение в дифференциальную геометрию, Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 2000
- [7] Дж. Торп, Начальные главы дифференциальной геометрии, "Мир", Москва, 1982
- [8] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия
- [9] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, "Добросвет", Москва, 1998
- [10] Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторной топологии, "Наука", Москва, 1986.